ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ.
ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ГОСТ 11.009—79

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
Москва

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПРОДУКЦИИ.
ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ГОСТ 11.009—79

Издание официальное

МОСКВА — 1980

РАЗРАБОТАН Всесоюзным научно-исследовательским институтом стандартизации (ВНИИС)

ИСПОЛНИТЕЛИ

А. М. Бендерский, канд. техн. наук; **Н. Б. Левина,** канд. физ.-мат. наук; **А. А. Богатырев,** канд. экон. наук; **Н. Г. Миронова; Л. С. Сипатрина; Ю. Д. Филиппов; Л. А. Фомина; З. Н. Шкотт**

ВНЕСЕН Всесоюзным научно-исследовательским институтом стандартизации (ВНИИС)

Директор **А. В. Гличев**

УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 28 сентября 1979 г. № 3768

УДК 519.2 : 658.562.014 : 006.354 Группа Т59

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Система управления качеством продукции.
Прикладная статистика

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Product quality control system. Applied statistics.
Point and interval estimators for parameters of
logarithmico-normal distribution

ГОСТ 11.009—79

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 28 сентября 1979 г. № 3768 срок введения установлен

с 01.07. 1980 г.

Настоящий стандарт устанавливает правила определения оценок и доверительных границ для параметров логарифмически нормального распределения по совокупности статистических данных, если эти данные подчинены логарифмически нормальному распределению. Проверка согласия опытного распределения этих данных с логарифмически нормальным производится по ГОСТ 11.006—75.

Указанные правила даются как для полностью определенных, так и для неполных однократно усеченных или однократно цензурированных выборок.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Распределение положительной случайной величины X называется логарифмически нормальным, если случайная величина

$$Y=\lg X \tag{1}$$

имеет нормальное распределение (см. ГОСТ 11.004—74).

1.2. Функция распределения величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\lg x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{(\lg x-a)/\sigma} e^{-t^2/2}dt & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x\leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, a и σ являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины Y, определенной по формуле (1).

1.3. Плотность распределения величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}\,e^{-\frac{(\lg x-a)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x>0\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0,\end{cases} \qquad (3)$$

где $M=\lg e=0{,}4343$.

1.4. Для определения оценок и доверительных границ параметров логарифмически нормального распределения можно также пользоваться натуральными логарифмами (см. рекомендуемое приложение 4).

Формулы для математического ожидания и дисперсии величины X, а также оценки для них, даны в справочном приложении 3.

1.5. В разд. 3—6 при определении нижней односторонней доверительной границы пользуются одной из формул (11), (13), (15), (21), (23), (28), (30), где γ — заданное значение односторонней доверительной вероятности.

При определении верхней односторонней доверительной границы пользуются одной из формул (12), (14), (16), (22), (24), (29), (31), где γ — заданное значение односторонней доверительной вероятности.

При определении доверительного интервала для заданной двусторонней доверительной вероятности γ^* сначала определяют γ по формуле

$$\gamma=\frac{1+\gamma^*}{2}. \qquad (4)$$

Затем пользуются соответствующими формулами, в которых γ вычислена по формуле (4).

Доверительный интервал (бесконечный в одностороннем случае и конечный в двустороннем) накрывает значение параметра с вероятностью γ в одностороннем случае и γ^* в двустороннем.

2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ a и σ

2.1. Оценку $\bar{a}$ параметра a находят по формуле

$$\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg x_i, \qquad (5)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — совокупность наблюденных значений случайной величины X.

2.2. Если значение параметра известно, то оценку s^2 параметра σ^2 находят по формуле

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\lg x_i-a)^2. \qquad (6)$$

Если значение параметра a неизвестно, то оценку S^2 параметра σ^2 находят по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\lg x_i - \bar{a})^2, \qquad (7)$$

где $\bar{a}$ определяют по формуле (5) (см. пример 1 справочного приложения 1).

Оценки (4)—(6) являются несмещенными и состоятельными.

2.3. Оценку S_1 параметра σ находят по следующим формулам:

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\lg x_i - a)^2} \qquad (8)$$

при известном значении a;

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\lg x_i - \bar{a})^2} \qquad (9)$$

при неизвестном значении a; здесь $\bar{a}$ определяют по формуле (5).

Оценки (8), (9) являются состоятельными, но смещенными. Их можно использовать в тех случаях, когда не требуется большая точность вычислений. В противном случае находят несмещенную оценку для σ по формуле

$$S = M_K \cdot S_1, \qquad (10)$$

где

при известном a находят S_1 по формуле (8) и M_K по табл. 1 при $K=n$;

при неизвестном a находят S_1 по формуле (9) и M_K по табл. 1 при $K=n-1$ (см. пример 1 справочного приложения 1).

Таблица 1

Значения коэффициентов M_K

K	M_K	K	M_K	K	M_K
1	1,253	10	1,025	19	1,013
2	1,128	11	1,023	20	1,013
3	1,085	12	1,021	25	1,010
4	1,064	13	1,019	30	1,008
5	1,051	14	1,018	35	1,007
6	1,042	15	1,017	40	1,006
7	1,036	16	1,016	45	1,006
8	1,032	17	1,015	50	1,005
9	1,028	18	1,014	60	1,004

2.4. В случае, когда не требуется большая точность и желательно быстро получить результат, оценки параметров a и σ следует определять с помощью вероятностной сетки для логарифмически нормального распределения по ГОСТ 11.008—75. Ориентировочно оценку параметра σ можно определять через размах (средний размах) выборки, см. рекомендуемое приложение 2.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРА a

3.1. Нижнюю и верхнюю доверительные границы (соответственно $a_н$, $a_в$) для параметра a при известном значении параметра σ находят по формулам:

$$a_н = \bar{a} - \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (11)$$

$$a_в = \bar{a} + \frac{u_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (12)$$

где $\bar{a}$ находят по формуле (5), а u_γ — по табл. 3 (см. пример 4 справочного приложения 1).

3.2. Доверительные границы для параметра a при неизвестном значении параметра σ находят по формулам:

$$a_н = \bar{a} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \qquad (13)$$

$$a_в = \bar{a} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \qquad (14)$$

где $\bar{a}$ и s находят соответственно по формулам (5) и (10), а t_γ — в табл. 2 по заданным значениям $n-1$ и γ (см. примеры 2 и 3 справочного приложения 1).

Таблица 2

$n-1$	Значения коэффициентов t_γ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,9990
1	1,375	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785
8	0,889	1,397	1,859	2,306	2,896	3,355	3,832	4,501

Продолжение табл. 2

$n-1$	Значения коэффициентов t_γ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,9990
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,054	3,428	3,930
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,611
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,090	3,467
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,056	3,421
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385
32	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,015	3,365
34	0,853	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,002	3,348
36	0,852	1,305	1,688	2,028	2,434	2,719	2,990	3,333
38	0,852	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	2,980	3,319
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307
42	0,851	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	2,963	3,296
44	0,850	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	2,955	3,286
46	0,850	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	2,949	3,277
48	0,849	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	2,943	3,269
50	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261
55	0,848	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	2,925	3,256
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232
65	0,847	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	2,906	3,220
70	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	2,899	3,211
80	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195
90	0,845	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	2,878	3,183
100	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174
120	0,844	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,159
150	0,844	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	2,849	3,145
200	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	2,838	3,131
250	0,843	1,285	1,651	1,969	2,341	2,596	2,832	3,123
300	0,842	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	2,828	3,118
400	0,842	1,284	1,649	1,966	2,336	2,588	2,823	3,111
500	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	2,819	3,107

Примечание. Для отсутствующих в табл. 2 значений $n-1$ величину t_γ находят линейной интерполяцией

Таблица 3

Значения коэффициентов u_γ при односторонней доверительной вероятности γ

0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,999
0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРА σ

Нижнюю и верхнюю доверительные границы для параметра σ (соответственно $\sigma_н$, $\sigma_в$) находят по формулам:

$$\sigma_н = z_н \cdot s, \tag{15}$$

$$\sigma_в = z_в \cdot s, \tag{16}$$

где s находят по разд. 2;

$z_н$ или (и) $z_в$ находят соответственно по табл. 4 и 5

при

$K=n$, если значение параметра a известно;

$K=n-1$, если значение параметра a неизвестно.

(См. примеры 5 и 6 справочного приложения 1).

Таблица 4

K	Значения коэффициентов $z_н$ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,999
2	0,788	0,659	0,578	0,521	0,466	0,434	0,408	0,380
3	0,804	0,693	0,620	0,566	0,514	0,483	0,457	0,429
4	0,817	0,717	0,649	0,599	0,549	0,519	0,493	0,465
5	0,828	0,736	0,672	0,624	0,576	0,546	0,521	0,494
6	0,837	0,753	0,690	0,644	0,597	0,569	0,544	0,517
7	0,845	0,763	0,705	0,661	0,616	0,588	0,563	0,536
8	0,852	0,772	0,718	0,675	0,631	0,604	0,580	0,553
9	0,859	0,782	0,729	0,688	0,645	0,618	0,594	0,568
10	0,864	0,791	0,739	0,699	0,656	0,630	0,607	0,581
11	0,869	0,798	0,748	0,708	0,667	0,641	0,619	0,593
12	0,872	0,805	0,755	0,717	0,677	0,651	0,629	0,604
13	0,874	0,810	0,762	0,725	0,685	0,660	0,638	0,614
14	0,877	0,814	0,769	0,732	0,693	0,669	0,647	0,623
15	0,881	0,820	0,775	0,739	0,700	0,676	0,655	0,631
16	0,884	0,826	0,780	0,745	0,707	0,683	0,662	0,638
17	0,886	0,828	0,785	0,750	0,713	0,690	0,669	0,646
18	0,888	0,832	0,790	0,756	0,719	0,696	0,675	0,652
19	0,891	0,836	0,794	0,760	0,725	0,702	0,681	0,658
20	0,894	0,839	0,798	0,765	0,730	0,707	0,687	0,664
22	0,898	0,845	0,805	0,773	0,739	0,717	0,697	0,675

Продолжение табл. 4

K	Значения коэффициентов $z_н$ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,999
24	0,901	0,851	0,812	0,781	0,747	0,726	0,707	0,685
26	0,904	0,855	0,818	0,788	0,755	0,734	0,715	0,694
28	0,907	0,859	0,823	0,794	0,762	0,741	0,723	0,702
30	0,909	0,863	0,828	0,799	0,768	0,748	0,730	0,709
35	0,915	0,871	0,838	0,811	0,781	0,762	0,745	0,725
40	0,919	0,879	0,847	0,821	0,792	0,774	0,757	0,738
45	0,923	0,885	0,854	0,829	0,802	0,784	0,768	0,750
50	0,927	0,889	0,861	0,837	0,810	0,793	0,777	0,760
60	0,932	0,898	0,871	0,849	0,824	0,808	0,793	0,776
70	0,937	0,905	0,879	0,858	0,835	0,820	0,805	0,789
80	0,941	0,910	0,886	0,866	0,844	0,829	0,815	0,801
90	0,943	0,915	0,892	0,873	0,852	0,838	0,825	0,810
100	0,946	0,919	0,897	0,879	0,858	0,845	0,832	0,818

Таблица 5

K	Значения коэффициентов $z_в$ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,999
2	2,12	3,08	4,42	6,28	9,97	14,1	19,98	31,6
3	1,73	2,27	2,92	3,73	5,11	6,47	8,19	11,1
4	1,56	1,94	2,37	2,87	3,67	4,40	5,29	6,64
5	1,46	1,76	2,09	2,45	3,00	3,48	4,04	4,88
6	1,40	1,65	1,92	2,20	2,62	2,98	3,38	2,97
7	1,35	1,57	1,80	2,04	2,38	2,66	2,97	3,42
8	1,32	1,51	1,71	1,92	2,20	2,44	2,69	3,06
9	1,29	1,47	1,65	1,83	2,08	2,28	2,49	2,79
10	1,27	1,43	1,59	1,75	1,98	2,15	2,34	2,60
11	1,25	1,40	1,55	1,70	1,90	2,06	2,22	2,45
12	1,24	1,38	1,52	1,65	1,83	1,98	2,13	2,33
13	1,23	1,36	1,49	1,61	1,78	1,91	2,05	2,23
14	1,22	1,34	1,46	1,58	1,73	1,85	1,98	2,15
15	1,21	1,32	1,44	1,55	1,69	1,81	1,93	2,08
16	1,20	1,31	1,42	1,52	1,66	1,76	1,87	2,01
17	1,19	1,30	1,40	1,50	1,63	1,73	1,83	1,96
18	1,18	1,28	1,38	1,48	1,60	1,70	1,79	1,92
19	1,18	1,27	1,37	1,46	1,58	1,67	1,75	1,87
20	1,17	1,26	1,36	1,44	1,56	1,64	1,72	1,84
22	1,16	1,25	1,34	1,42	1,52	1,60	1,67	1,77
24	1,15	1,24	1,32	1,39	1,49	1,56	1,63	1,72
26	1,15	1,23	1,30	1,37	1,46	1,53	1,59	1,68
28	1,14	1,22	1,29	1,35	1,44	1,50	1,56	1,64
30	1,13	1,21	1,27	1,34	1,42	1,48	1,53	1,61
35	1,12	1,19	1,25	1,30	1,38	1,43	1,47	1,54
40	1,11	1,17	1,23	1,28	1,34	1,39	1,43	1,49

Продолжение табл. 5

K	Значения коэффициентов $z_в$ при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,9975	0,999
45	1,10	1,16	1,21	1,26	1,32	1,36	1,40	1,46
50	1,10	1,15	1,20	1,24	1,30	1,34	1,37	1,42
60	1,09	1,14	1,18	1,22	1,27	1,30	1,33	1,37
70	1,08	1,13	1,16	1,20	1,24	1,27	1,30	1,34
80	1,08	1,12	1,15	1,18	1,22	1,25	1,27	1,31
90	1,07	1,11	1,14	1,17	1,21	1,23	1,25	1,29
100	1,07	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,24	1,27

Примечание. Для отсутствующих в табл. 4 и 5 значений K величины $z_н$, $z_в$ находят линейной интерполяцией по K.

5. СЛУЧАЙ ЦЕНЗУРИРОВАННОЙ ВЫБОРКИ*

5.1. В этом разделе используются следующие обозначения:

n — объем всей выборки;

m — число известных элементов;

$$h = \frac{n-m}{n}. \qquad (17)$$

5.2. Выборка, цензурированная слева (т. е. $x_i \geqslant d$ для известных элементов $x_1, \ldots, x_m$).

5.2.1. Оценки $\bar{a}$ и s параметров a и σ соответственно находят следующим образом:

вычисляют

$$v = m \frac{\sum_{i=1}^{m} (\lg x_i - \lg d)^2}{\left[\sum_{i=1}^{m} (\lg x_i - \lg d)\right]^2}; \qquad (18)$$

находят z по табл. 6, в которую входят со значениями h и v, найденными соответственно по формулам (17) и (18); находят $f_1(z)$ в табл. 7 по найденному значению z; вычисляют s по формуле

$$s = \frac{1-h}{h f_1(z) - (1-h) z} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} (\lg x_i - \lg d)}{m}; \qquad (19)$$

* Определение цензурированной выборки дано в справочном приложении 5.

Таблица 6

v	Значения коэффициента z для цензурированной выборки									
	$h=0,05$	$h=0,10$	$h=0,15$	$h=0,20$	$h=0,25$	$h=0,30$	$h=0,35$	$h=0,40$	$h=0,45$	$h=0,50$
1,00	—	—2,680	—1,985	—1,537	—1,207	—0,943	—0,720	—0,523	—0,345	—0,178
1,01	—	—2,555	—1,921	—1,499	—1,182	—0,925	—0,707	—0,514	—0,338	—0,173
1,02	—	—2,445	—1,862	—1,463	—1,158	—0,909	—0,695	—0,505	—0,331	—0,168
1,03	—	—2,349	—1,809	—1,429	—1,135	—0,893	—0,683	—0,496	—0,325	—0,163
1,04	—	—2,263	—1,759	—1,398	—1,114	—0,877	—0,672	—0,488	—0,318	—0,158
1,05	—2,922	—2,185	—1,714	—1,368	—1,093	—0,863	—0,661	—0,480	—0,312	—0,154
1,06	—2,786	—2,115	—1,674	—1,340	—1,074	—0,849	—0,651	—0,472	—0,306	—0,149
1,07	—2,667	—2,051	—1,632	—1,314	—1,055	—0,835	—0,641	—0,464	—0,300	—0,144
1,08	—2,562	—1,992	—1,595	—1,289	—1,037	—0,822	—0,631	—0,457	—0,295	—0,140
1,09	—2,468	—1,939	—1,560	—1,265	—1,020	—0,809	—0,621	—0,450	—0,289	—0,136
1,10	—2,384	—1,889	—1,528	—1,242	—1,004	—0,797	—0,612	—0,443	—0,284	—0,132
1,11	—2,308	—1,843	—1,497	—1,221	—0,988	—0,786	—0,603	—0,436	—0,278	—0,128
1,12	—2,239	—1,800	—1,468	—1,200	—0,973	—0,774	—0,595	—0,429	—0,273	—0,124
1,13	—2,175	—1,760	—1,441	—1,180	—0,959	—0,763	—0,587	—0,423	—0,268	—0,120
1,14	—2,117	—1,722	—1,415	—1,162	—0,945	—0,753	—0,579	—0,416	—0,263	—0,116
1,15	—2,063	—1,686	—1,390	—1,144	—0,932	—0,743	—0,571	—0,410	—0,258	—0,112
1,16	—2,013	—1,653	—1,366	—1,127	—0,919	—0,733	—0,563	—0,404	—0,254	—0,108
1,17	—1,966	—1,621	—1,344	—1,110	—0,906	—0,723	—0,555	—0,399	—0,249	—0,105
1,18	—1,923	—1,591	—1,322	—1,094	—0,894	—0,714	—0,548	—0,393	—0,245	—0,101
1,19	—1,882	—1,563	—1,302	—1,079	—0,882	—0,705	—0,541	—0,387	—0,240	—0,098
1,20	—1,844	—1,536	—1,282	—1,064	—0,871	—0,696	—0,534	—0,382	—0,236	—0,094
1,22	—1,773	—1,486	—1,245	—1,036	—0,850	—0,679	—0,521	—0,371	—0,228	—0,087
1,24	—1,710	—1,441	—1,211	—1,010	—0,829	—0,663	—0,508	—0,361	—0,220	—0,081
1,26	—1,654	—1,399	—1,180	—0,986	—0,810	—0,648	—0,496	—0,352	—0,212	—0,075
1,28	—1,602	—1,360	—1,150	—0,963	—0,792	—0,634	—0,485	—0,343	—0,204	—0,069
1,30	—1,555	—1,325	—1,123	—0,941	—0,775	—0,620	—0,474	—0,334	—0,197	—0,063
1,32	—1,512	—1,292	—1,097	—0,921	—0,759	—0,607	—0,463	—0,325	—0,190	—0,058
1,34	—1,472	—1,261	—1,073	—0,902	—0,744	—0,595	—0,453	—0,317	—0,184	—0,052
1,36	—1,435	—1,233	—1,050	—0,884	—0,729	—0,583	—0,444	—0,309	—0,177	—0,047
1,38	—1,401	—1,206	—1,029	—0,866	—0,715	—0,572	—0,434	—0,301	—0,171	—0,042
1,40	—1,369	—1,180	—1,009	—0,850	—0,702	—0,561	—0,425	—0,294	—0,166	—0,037

Продолжение табл. 6

v	Значения коэффициента z для цензурированной выборки									
	$h=0,05$	$h=0,10$	$h=0,15$	$h=0,20$	$h=0,25$	$h=0,30$	$h=0,35$	$h=0,40$	$h=0,45$	$h=0,50$
1,42	—1,339	—1,156	—0,989	—0,834	—0,689	—0,550	—0,417	—0,287	—0,160	—0,032
1,44	—1,311	—1,134	—0,971	—0,819	—0,677	—0,540	—0,408	—0,280	—0,154	—0,027
1,46	—1,285	—1,113	—0,954	—0,805	—0,665	—0,530	—0,400	—0,273	—0,148	—0,023
1,48	—1,260	—1,092	—0,937	—0,792	—0,654	—0,521	—0,393	—0,267	—0,143	—0,019
1,50	—1,236	—1,073	—0,921	—0,779	—0,643	—0,512	—0,385	—0,261	—0,138	—0,014
1,52	—1,214	—1,065	—0,906	—0,766	—0,632	—0,503	—0,378	—0,255	—0,133	—0,010
1,54	—1,193	—1,038	—0,892	—0,754	—0,622	—0,495	—0,371	—0,249	—0,128	—0,006
1,56	—1,173	—1,021	—0,878	—0,742	—0,613	—0,487	—0,364	—0,243	—0,123	—0,002
1,58	—1,154	—1,005	—0,865	—0,731	—0,603	—0,479	—0,357	—0,238	—0,118	0,002
1,60	—1,135	—0,990	—0,852	—0,721	—0,594	—0,471	—0,351	—0,232	—0,114	0,006
1,70	—1,055	—0,922	—0,795	—0,673	—0,553	—0,437	—0,322	—0,207	—0,093	0,023
1,80	—0,989	—0,866	—0,747	—0,631	—0,518	—0,407	—0,296	—0,186	—0,074	0,039
1,90	—0,934	—0,819	—0,706	—0,596	—0,488	—0,380	—0,273	—0,166	—0,058	0,053
2,00	—0,887	—0,778	—0,671	—0,565	—0,461	—0,357	—0,253	—0,149	—0,043	0,066
2,10	—0,847	—0,742	—0,639	—0,538	—0,437	—0,336	—0,235	—0,133	—0,029	0,077
2,20	—0,811	—0,711	—0,611	—0,513	—0,415	—0,317	—0,219	—0,119	—0,017	0,088
2,30	—0,779	—0,682	—0,586	—0,491	—0,396	—0,300	—0,203	—0,105	—0,005	0,098
2,40	—0,751	—0,657	—0,564	—0,471	—0,378	—0,284	—0,189	—0,093	—0,006	0,107
2,50	—0,725	—0,634	—0,544	—0,453	—0,362	—0,270	—0,177	—0,082	—0,016	0,116
2,60	—0,702	—0,613	—0,525	—0,436	—0,347	—0,257	—0,165	—0,072	—0,025	0,124
2,70	—0,680	—0,594	—0,507	—0,421	—0,333	—0,244	—0,154	—0,062	—0,033	0,131
2,80	—0,661	—0,576	—0,491	—0,406	—0,320	—0,233	—0,144	—0,053	—0,041	0,138
2,90	—0,643	—0,560	—0,477	—0,393	—0,308	—0,222	—0,134	—0,044	—0,049	0,145
3,00	—0,626	—0,545	—0,463	—0,381	—0,297	—0,212	—0,125	—0,036	—0,056	0,151

вычисляют $\bar{a}$ по формуле

$$\bar{a}=\lg d-zs, \tag{20}$$

где z и s определяют как указано выше.

5.2.2. Доверительные границы для параметров a и σ находят по формулам

$$a_{н}=\bar{a}-u_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{f_2(z)}; \tag{21}$$

$$a_{в}=\bar{a}+u_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{f_2(z)}; \tag{22}$$

$$\sigma_{н}=s-u_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{f_3(z)}; \tag{23}$$

$$\sigma_{в}=s+u_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{f_3(z)}, \tag{24}$$

где u_{γ} находят по табл. 3:

z, s, $\bar{a}$ находят как в п. 5.2.1;

$f_2(z)$, $f_3(z)$ находят в табл. 7 по найденному значению z.

Таблица 7

Значения функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$

z	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$	z	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$
—3,0	3,283	1,000	0,501	—1,0	1,525	1,042	0,643
—2,9	3,190	1,000	0,502	—0,9	1,446	1,054	0,671
—2,8	3,098	1,000	0,502	—0,8	1,367	1,069	0,702
—2,7	3,006	1,000	0,503	—0,7	1,290	1,089	0,740
—2,6	2,914	1,000	0,504	—0,6	1,215	1,114	0,783
—2,5	2,823	1,001	0,505	—0,5	1,141	1,147	0,833
—2,4	2,732	1,001	0,507	—0,4	1,069	1,189	0,891
—2,3	2,641	1,001	0,509	—0,3	0,998	1,243	0,959
—2,2	2,552	1,001	0,512	—0,2	0,929	1,312	1,039
—2,1	2,462	1,002	0,515	—0,1	0,863	1,401	1,132
—2,0	2,373	1,003	0,519	0,0	0,798	1,517	1,241
—1,9	2,285	1,004	0,524	0,1	0,735	1,667	1,370
—1,8	2,197	1,005	0,530	0,2	0,675	1,863	1,523
—1,7	2,110	1,006	0,537	0,3	0,617	2,118	1,704
—1,6	2,024	1,009	0,546	0,4	0,562	2,453	1,919
—1,5	1,939	1,011	0,556	0,5	0,509	2,893	2,178
—1,4	1,854	1,015	0,568	0,6	0,459	3,473	2,488
—1,3	1,770	1,019	0,583	0,7	0,412	4,241	2,863
—1,2	1,688	1,025	0,600	0,8	0,368	5,261	3,319
—1,1	1,606	1,032	0,620	0,9	0,326	6,623	3,876

Продолжение табл. 7

z	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$	z	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$
1,0	0,288	8,448	4,561	1,6	0,117	44,99	14,24
1,1	0,252	10,90	5,408	1,7	0,098	61,13	17,71
1,2	0,219	14,22	6,462	1,8	0,082	83,64	22,19
1,3	0,190	18,73	7,780	1,9	0,068	115,2	28,05
1,4	0,163	24,89	9,442	2,0	0,055	159,7	35,74
1,5	0,139	33,34	11,55				

Эти формулы обеспечивают точность, достаточную для практических целей, при объеме выборки $n \geqslant 20$.

5.3. Выборка, цензурированная справа (т. е. $x_i \leqslant d'$ для известных m элементов выборки $x_1, \ldots, x_m$).

Результаты обрабатываются так же, как указано в пп. 5.2.1; 5.2.2 со следующими изменениями.

Формулу (19) для вычисления s заменяют на

$$s = \frac{1-h}{hf_1(z)-(1-h)z} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m}(\lg d' - \lg x_i)}{m}. \qquad (25)$$

Формулу (20) для вычисления $\bar{a}$ заменяют на

$$\bar{a} = zs + \lg d'. \qquad (26)$$

Прочие формулы пп. 5.2.1 и 5.2.2 остаются без изменений (см. примеры 7 и 8 справочного приложения 1).

6. СЛУЧАЙ УСЕЧЕННОЙ ВЫБОРКИ*

6.1. Оценки параметров a и σ находят следующим образом:

вычисляют v по формуле (18), где m — число известных элементов выборки;

находят z по табл. 8, в которую входят со значением v, найденным по формуле (18);

находят $g_1(z)$ из табл. 9 по найденному значению z; вычисляют s по формуле

$$s = \begin{cases} g_1(z) \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(\lg x_i - \lg d)}{m} \text{ для выборки, усеченной слева;} \\ g_1(z) \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(\lg d' - \lg x_i)}{m} \text{ для выборки, усеченной справа;} \end{cases} \qquad (27)$$

* Определение усеченной выборки дано в справочном приложении 5.

вычисляют $\bar{a}$ по формуле (20) для выборки, усеченной слева, и по формуле (26) для выборки, усеченной справа; в эти формулы подставляют z, найденное по табл. 8, $g_1(z)$, найденное по табл. 9, и s, найденное по формуле (27).

6.2. Доверительные границы для параметров a и σ находят по формулам:

$$a_н = \bar{a} - u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{g_2(z)}; \qquad (28)$$

$$a_в = \bar{a} + u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{g_2(z)}; \qquad (29)$$

$$\sigma_в = s - u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{g_3(z)}; \qquad (30)$$

$$\sigma_в = s + u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{g_3(z)}, \qquad (31)$$

где u_γ находят по табл. 3;

z, s, $\bar{a}$ находят как в п. 6.1;

$g_2(z)$, $g_3(z)$ находят в табл. 9 по найденному значению z.

Эти формулы обеспечивают точность, достаточную для практических целей, при объеме выборки $n \geqslant 20$ (см. примеры 9 и 10 справочного приложения 1).

Таблица 8

Значения коэффициента z для усеченной выборки

v	z	v	z	v	z	v	z
1,10	—3,145	1,30	—1,429	1,50	—0,383	1,70	1,829
1,11	—2,990	1,31	—1,373	1,51	—0,330	1,71	1,905
1,12	—2,851	1,32	—1,318	1,52	—0,277	1,72	1,984
1,13	—2,727	1,33	—1,263	1,53	—0,224	1,73	1,066
1,14	—2,613	1,34	—1,209	1,54	—0,170	1,74	1,151
1,15	—2,508	1,35	—1,156	1,55	—0,116	1,75	1,240
1,16	—2,410	1,36	—1,103	1,56	—0,060	1,76	1,332
1,17	—2,319	1,37	—1,051	1,57	—0,004	1,77	1,428
1,18	—2,232	1,38	—0,999	1,58	0,052	1,78	1,530
1,19	—2,151	1,39	—0,947	1,59	0,110	1,79	1,636
1,20	—2,073	1,40	—0,896	1,60	0,168	1,80	1,749
1,21	—1,999	1,41	—0,845	1,61	0,228	1,81	1,868
1,22	—1,928	1,42	—0,794	1,62	0,289	1,82	1,994
1,23	—1,859	1,43	—0,743	1,63	0,351		
1,24	—1,792	1,44	—0,692	1,64	0,414		
1,25	—1,728	1,45	—0,641	1,65	0,479		
1,26	—1,665	1,46	—0,589	1,66	0,545		
1,27	—1,604	1,47	—0,538	1,67	0,613		
1,28	—1,545	1,48	—0,487	1,68	0,683		
1,29	—1,486	1,49	—0,435	1,69	0,754		

Таблица 9

Значения функций $g_1(z)$, $g_2(z)$, $g_3(z)$

z	$g_1(z)$	$g_2(z)$	$g_3(z)$	z	$g_1(z)$	$g_2(z)$	$g_3(z)$
—3,0	0,3328	1,015	0,5363	—0,5	0,9909	8,115	2,440
—2,9	0,3441	1,019	0,5453	—0,4	1,0396	9,896	2,692
—2,8	0,3561	1,026	0,5562	—0,3	1,0902	12,09	2,975
—2,7	0,3689	1,034	0,5590	—0,2	1,1428	14,80	3,290
—2,6	0,3826	1,044	0,5842	—0,1	1,1971	18,12	3,641
—2,5	0,3972	1,057	0,6020	0,0	1,2533	22,19	4,031
—2,4	0,4128	1,074	0,6228	0,1	1,3113	27,14	4,465
—2,3	0,4294	1,096	0,6469	0,2	1,3710	33,16	4,947
—2,2	0,4472	1,124	0,6747	0,3	1,4323	40,44	5,481
—2,1	0,4662	1,159	0,7066	0,4	1,4953	49,23	6,072
—2,0	0,4866	1,204	0,7433	0,5	1,5599	59,81	6,725
—1,9	0,5082	1,260	0,7852	0,6	1,6259	72,49	7,447
—1,8	0,5314	1,332	0,8329	0,7	1,6935	87,63	8,242
—1,7	0,5560	1,424	0,8871	0,8	1,7624	105,7	9,118
—1,6	0,5823	1,540	0,9487	0,9	1,8327	127,1	10,08
—1,5	0,6102	1,688	1,018	1,0	1,9043	152,4	11,14
—1,4	0,6398	1,874	1,097	1,1	1,9771	182,3	12,30
—1,3	0,6713	2,110	1,186	1,2	2,0511	217,4	13,57
—1,2	0,7045	2,408	1,287	1,3	2,1262	258,6	14,96
—1,1	0,7396	2,783	1,400	1,4	2,2024	306,8	16,47
—1,0	0,7766	3,256	1,527	1,5	2,2796	362,9	18,12
—0,9	0,8156	3,849	1,671	1,6	2,3578	428,1	19,92
—0,8	0,8565	4,592	1,831	1,7	2,4369	503,7	21,88
—0,7	0,8993	5,520	2,012	1,8	2,5169	591,1	24,01
—0,6	0,9442	6,677	2,214	1,9	2,5978	691,7	26,31
				2,0	2,6794	807,6	28,81

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ СТАНДАРТА

Пример 1. Имеется выборка объемом 20 из значений случайной величины X, подчиненной логарифмически нормальному распределению. Значения x_i приведены в табл. 1. Найти оценки параметров a и σ.

Таблица 1

i	x_i	$\lg x_i$	i	x_i	$\lg x_i$
1	1076	3,032	11	628	2,758
2	1700	3,230	12	735	2,866
3	2616	3,418	13	1074	3,031
4	4754	3,677	14	375	2,574
5	351	2,545	15	2275	3,357
6	4195	3,623	16	489	2,690
7	1767	3,247	17	788	2,897
8	781	2,893	18	524	2,719
9	2021	3,306	19	1746	3,242
10	776	2,890	20	1100	3,041

Решение.
Согласно формулам (5), (9), (10) настоящего стандарта находим:

$$\overline{a}=3,054,$$

$$s_1^2=0,10602;$$

$$s_1=0,326;$$

$$s=M_{19}\cdot s_1=1,013\cdot 0,326=0,330.$$

Пример 2. В условиях предыдущего примера найти односторонние доверительные границы для параметра a при доверительной вероятности $\gamma=0,90$.

Решение. Согласно п. 3.1 для $n=20$ и $\gamma=0,90$ по табл. 2 настоящего стандарта находим

$$\frac{t_{0,90}(19)}{\sqrt{20}}=\frac{1,328}{\sqrt{20}}=0,297$$

и по формулам (13) и (14)

$$a_н=3,054-0,330\cdot 0,297=3,054-0,093=2,956;$$

$$a_в=3,054+0,098=3,152.$$

Пример 3. В условиях примера 1 найти доверительный интервал для параметра a при двусторонней доверительной вероятности $\gamma^*=0,95$.

Решение. По формуле (4) находим

$$\gamma=0,975.$$

По табл. 2 настоящего стандарта для $n=20$ и найденного значения γ находим

$$\frac{t_{0,975}(19)}{\sqrt{20}}=\frac{2,086}{\sqrt{20}}=0,466$$

и по формулам (13) и (14)

$$a_н=3,054-0,330\cdot0,466=3,054-0,154=2,900;$$

$$a_в=3,054+0,154=3,208.$$

Пример 4. Дана выборка из 10 значений случайной величины, подчиненной логарифмически нормальному распределению (табл. 2). Известно, что $\sigma=1,00$. Найти доверительный интервал для a при двусторонней доверительной вероятности $\gamma^*=0,90$.

Таблица 2

i	x_i	$\lg x_i$	i	x_i	$\lg x_i$
1	25,1	1,40	6	93,3	1,97
2	36,3	1,56	7	37,2	1,57
3	2951,2	3,47	8	4,9	0,69
4	17,4	1,24	9	30,9	1,49
5	1,2	0,07	10	169,8	2,23

Решение. Согласно п. 2.1 настоящего стандарта по формуле (5) находим

$$\overline{a}=1,57.$$

По формуле (13) находим $\gamma=0,95$ и по табл. 3 настоящего стандарта

$$u_\gamma=1,645.$$

По формулам (11) и (12)

$$a_н=1,57-\frac{1,645}{\sqrt{10}}\cdot1,00=1,57-0,52=1,05;$$

$$a_в=1,57+0,52=2,09.$$

Пример 5. В условиях примера 1 найти верхнюю доверительную границу для параметра σ при односторонней доверительной вероятности $\gamma=0,95$.

Решение. Согласно разд. 4 настоящего стандарта для $K=19$ и $\gamma=0,95$ из табл. 4 настоящего стандарта находят

$$z_в=1,37.$$

По формуле (16) $\sigma_в=1,37\cdot0,330=0,452$.

Пример 6. В условиях примера 1 найти доверительный интервал для параметра σ при двусторонней доверительной вероятности $\gamma^*=0{,}90$.

Решение. По формуле (4) находим $\gamma=0{,}95$.

Из табл. 4 настоящего стандарта находим для $K=19$ и $\gamma=0{,}95$

$$z_н=0{,}794.$$

По формуле (15) находим

$$\sigma_н=0{,}794\cdot 0{,}330=0{,}264;$$

значение $\sigma_в=0{,}452$ найдено в предыдущем примере.

Пример 7. Известно, что наработка некоторого изделия на отказ имеет логарифмически нормальное распределение. Проводились испытания по плану $[N, U, T]$ при $N=40$, $T=2000$ ч (см. ГОСТ 16504—74). Число изделий, отказавших до окончания срока испытания, равно $m=33$. В табл 3 приведены результаты испытаний (здесь x_i—срок работы i-го изделия, $d'=T=2000$, $\lg d'=3{,}301$). Найти оценки параметров a и σ.

Таблица 3

Номер изделия i	x_i	$\lg x_i$	$\lg d'-\lg x_i$	Номер изделия i	x_i	$\lg x_i$	$\lg d'-\lg x_i$
1	1076	3,031	0,270	18	901	2,954	0,347
2	1700	3,230	0,071	19	1665	3,221	0,080
3	351	2,545	0,756	20	986	2,994	0,307
4	1767	3,247	0,054	21	411	2,614	0,687
5	781	2,893	0,408	22	765	2,884	0,417
6	776	2,890	0,411	23	703	2,847	0,454
7	628	2,798	0,503	24	480	2,681	0,620
8	735	2,867	0,434	25	1397	3,145	0,156
9	1074	3,031	0,270	26	235	2,371	0,930
10	375	2,574	0,727	27	1797	3,255	0,046
11	489	2,690	0,611	28	841	2,925	0,376
12	788	2,897	0,404	29	658	2,818	0,483
13	524	2,719	0,582	30	736	2,867	0,434
14	1746	3,242	0,059	31	559	2,747	0,554
15	1100	3,041	0,260	32	901	2,955	0,346
16	509	2,707	0,594	33	1793	3,254	0,047
17	1872	3,272	0,029				

Решение. Здесь, очевидно, имеет место цензурированная справа выборка (см. также п. 5 справочного приложения 5). Согласно п. 5.3 настоящего стандарта находим

$$\sum_{i=1}^{33}(\lg d'-\lg x_i)=12{,}727,$$

$$\sum_{i=1}^{33}(\lg d'-\lg x_i)^2=6{,}671$$

$$v=33\cdot\frac{6{,}671}{12{,}727^2}=1{,}359.$$

По табл. 6 настоящего стандарта для $v=1{,}359$ и $h=\frac{40-33}{40}=0{,}175$ с помощью линейной интерполяции находим

$$z=-0{,}968;$$

по табл. 7 стандарта находим $f_1(-0{,}968)=1{,}336$;
по формуле (25) находим

$$s=\frac{0{,}825}{0{,}175\cdot 1{,}5+0{,}825\cdot 0{,}968}\cdot\frac{12{,}727}{33}=0{,}300;$$

по формуле (26)

$$\overline{a}=3{,}301-0{,}968\cdot 0{,}300=3{,}011.$$

Пример 8. В условиях предыдущего примера найти доверительные интервалы для параметров a и σ при двусторонней доверительной вероятности $\gamma^*=0{,}95$.

Решение. По формуле (4) имеет $\gamma=0{,}975$ и по табл. 3 настоящего стандарта $u_\gamma=1{,}960$.

По табл. 7 настоящего стандарта находим

$$f_2(-0{,}968)=1{,}046,$$

$$f_3(-0{,}968)=0{,}652$$

и по формулам (21)—(24) имеем

$$a_н=3{,}011-1{,}960\cdot\frac{0{,}3}{\sqrt{33}}\cdot\sqrt{1{,}046}=3{,}011-0{,}105=2{,}906,$$

$$a_в=3{,}011+0{,}105=3{,}116,$$

$$\sigma_н=0{,}300-1{,}960\cdot\frac{0{,}3}{\sqrt{33}}\cdot\sqrt{0{,}652}=0{,}300=0{,}083=0{,}217,$$

$$\sigma_в=0{,}300+0{,}083=0{,}383.$$

Пример 9. Известно, что распределение диаметров частиц подчинено логарифмически нормальному распределению. По данным табл. 4 (где x_i — размеры частиц в мкм) требуется найти параметры этого распределения, если известно, что средство измерения не охватывает всего диапазона изменения диаметров частиц, и часть результатов измерений — именно, когда диаметр частицы не более 100 мкм — не фиксируется.

Таблица 4

Номер измерения i	x_i	$\lg x_i$	$\lg x_i-\lg d$	Номер измерения i	x_i	$\lg x_i$	$\lg x_i-\lg d$
1	512	2,709	0,709	16	181	2,258	0,258
2	321	2,506	0,506	17	377	2,576	0,576
3	1660	3,220	1,220	18	360	2,556	0,556
4	973	2,988	0,998	19	314	2,497	0,497
5	1493	3,174	1,174	20	726	2,861	0,861

Продолжение табл. 4

Номер измерения i	x_i	$\lg x_i$	$\lg x_i - \lg d$	Номер измерения i	x_i	$\lg x_i$	$\lg x_i - \lg d$
6	851	2,895	0,895	21	461	2,664	0,664
7	136	2,133	0,133	22	420	2,623	0,623
8	1456	3,163	1,163	23	977	2,990	0,990
9	172	2,235	0,235	24	216	2,334	0,334
10	298	2,474	0,474	25	361	2,557	0,557
11	1493	3,174	1,174	26	126	2,100	0,100
12	265	2,423	0,423	27	352	2,546	0,546
13	996	2,998	0,998	28	1164	2,066	1,066
14	414	2,617	0,617	29	166	2,220	0,220
15	640	2,806	0,806	30	199	2,299	0,299

Решение. Здесь имеет место усеченная слева выборка с $d=100$. Согласно п. 6.1 настоящего стандарта находим

$$\sum_{i=1}^{30}(\lg x_i - \lg d) = 20,672,$$

$$\sum_{i=1}^{30}(\lg x_i - \lg d)^2 = 18,955,$$

$$v = 1,33.$$

По табл. 8 настоящего стандарта для $v=1,33$ находим

$$z = -1,263,$$

по табл. 9 настоящего стандарта находим

$$f_1(-1,263) = 0,6836.$$

По формуле (27) находим

$$s = 0,6836 \cdot \frac{20,672}{30} = 0,471$$

и по формуле (20)

$$\overline{a} = 2 + 1,263 \cdot 0,471 = 2,595.$$

Пример 10. В условиях предыдущего примера найти доверительные интервалы для параметров a и σ при двусторонней доверительной вероятности $\gamma^* = 0,90$.

Решение. По формуле (10) находим $\gamma = 0,95$ и по табл. 3 настоящего стандарта находим $u_{0,95} = 1,645$.

По табл. 9 настоящего стандарта находим

$$g_2(-1,263) = 2,220;$$

$$g_3(-1,263) = 1,223.$$

По формулам (28)—(31) имеем

$$a_н=2,595-1,645\cdot\frac{0,471}{\sqrt{30}}\cdot\sqrt{2,220}=2,595-0,211=2,384;$$

$$a_в=2,595+0,211=2,806;$$

$$\sigma_н=0,471-1,645\cdot\frac{0,471}{\sqrt{30}}\cdot\sqrt{1,223}=0,471-0,156=0,315;$$

$$\sigma_в=0,471+0,156=0,627.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Рекомендуемое

СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА σ ЧЕРЕЗ РАЗМАХ

1. В случае, когда не требуется большая точность оценки, а вычисления п. 2.3 представляются затруднительными, можно применять изложенный ниже способ оценки параметра σ.

2. Если объем выборки $n \leqslant 10$, то оценку параметра σ находят следующим образом: вычисляют размах R выборки как разность между логарифмами наибольшего и наименьшего элементов выборки:

$$R = \lg x_{\max} - \lg x_{\min}; \qquad (1)$$

находят оценку s' параметра σ по формуле

$$s' = \frac{R}{d_n}, \qquad (2)$$

где d_n находят из таблицы по объему выборки n.

n	d_n	n	d_n	n	d_n
2	1,128	5	2,326	8	2,847
3	1,693	6	2,534	9	2,970
4	2,059	7	2,704	10	3,078

3. Если объем выборки $n > 10$, то поступают следующим образом: разбивают выборку на k независимых подвыборок, содержащих по m ($5 \leqslant m \leqslant 7$) элементов; в последней подвыборке может оказаться меньше m элементов.

Затем для каждой j-й подвыборки вычисляют размах R_j по формуле (1).

4. Если удалось разбить выборку так, чтобы во всех подвыборках было одинаковое число элементов, то находят средний размах $\overline{R}$ по формуле

$$\overline{R} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} R_j. \qquad (3)$$

Оценку s'' параметра σ находят по формуле

$$s'' = \frac{\overline{R}}{d_m}, \qquad (4)$$

где d_m находят по таблице по объему подвыборки m.

Этот способ применим и в том случае, когда имеется k независимых выборок одинакового объема m ($2 \leqslant m \leqslant 9$) из одной и той же генеральной совокупности.

5. Если нельзя разбить выборку так, как указано в п. 4, и в последней подвыборке оказалось $m' < m$ элементов, то оценку s'' находят по формуле

$$s'' = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{d_m} \sum_{j=1}^{k} R_j + \frac{R_{m'}}{d_{m'}} \right], \qquad (5)$$

где d_m и $d_{m'}$ находят по таблице.

6. Следует подчеркнуть, что для использования оценки (4) требуется, чтобы k подвыборок были независимы. Если можно быть уверенным, что в исходной выборке элементы $x_1, \ldots, x_n$ следуют друг за другом случайным образом, то удобно следующее разбиение: $x_1, \ldots, x_m$; $x_{m+1}, \ldots, x_{2m}$; ...; $x_{km+1}, \ldots, x_n$.

Если такой уверенности нет, то для разбиения следует пользоваться таблицами случайных чисел (ГОСТ 11.003—73).

7. **Пример 1.** В условиях примера 4 справочного приложения 1 найти оценку s' параметра σ через размах R.

Решение. Имеем

$$R = \lg x_{\max} - \lg x_{\min} = 3{,}47 - 0{,}07 = 3{,}40;$$

находим по таблице $d_{10} = 3{,}078$, и по формуле (2)

$$s' = \frac{3{,}40}{3{,}078} = 1{,}10.$$

8. **Пример 2.** В условиях примера 1 справочного приложения 1, считая, что элементы выборки следуют друг за другом случайным образом, найти оценку s'' параметра σ через средний размах $\overline{R}$.

Решение. Выбираем $m = 5$ и разбиваем выборку на 4 подвыборки в порядке следования x_i. Имеем

$$R_1 = 3{,}677 - 2{,}545 = 1{,}132,$$
$$R_2 = 3{,}623 - 2{,}980 = 0{,}733,$$
$$R_3 = 3{,}357 - 2{,}574 = 0{,}783,$$
$$R_4 = 3{,}242 - 2{,}690 = 0{,}552.$$

По формуле (3)

$$\overline{R} = \frac{3{,}200}{4} = 0{,}800;$$

находим по таблице $d_5 = 2{,}326$ и по формуле (4)

$$s'' = \frac{0{,}800}{2{,}326} = 0{,}344.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Справочное

Оценки для математического ожидания и дисперсии логарифмически нормального распределения; доверительные границы для математического ожидания.

1. Для случайной величины X, имеющей логарифмически нормальное распределение, математическое ожидание m_1 и дисперсия m_2 определяются по формулам:

$$m_1 = 10^{a+\frac{\sigma^2}{2M}} = e^{\frac{a}{M}+\frac{\sigma^2}{2M^2}}; \qquad (1)$$

$$m_2 = m_1^2(10^{\frac{\sigma^2}{M}} - 1) = m_1^2(e^{\frac{\sigma^2}{M^2}} - 1), \qquad (2)$$

где a, σ, M определяются как указано в разд. 1 настоящего стандарта.

2. Оценку математического ожидания $\overline{m_1}$ находят из формулы

$$\lg \overline{m_1} = \overline{a} + \frac{1}{2M} s^2 = \overline{a} + 1{,}151\, s^2, \qquad (3)$$

оценку дисперсии $\overline{m_2}$ — из формулы

$$\overline{m_2} = \overline{m_1}^2(10^{1{,}151\, s^2} - 1), \qquad (4)$$

где оценки $\overline{a}$, s находят согласно разд. 2 настоящего стандарта, а $\overline{m_1}$ — по формуле (3).

3. При объеме выборки $n > 20$ доверительные границы $m_{1н}$, $m_{1в}$ для математического ожидания находят из формул:

$$\lg m_{1н} = \overline{a} + 1{,}151\, s^2 - u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2{,}650\, s^2}, \qquad (5)$$

$$\lg m_{1в} = \overline{a} + 1{,}151\, s^2 + u_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2{,}650\, s^2}, \qquad (6)$$

где оценки $\overline{a}$ и s находят по разд. 2; значение u_γ находят в табл. 3 настоящего стандарта.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Рекомендуемое

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ

1. Если случайная величина X имеет логарифмически нормальное распределение, то это означает, что случайная величина

$$Y_1=\ln X \tag{1}$$

имеет нормальное распределение. Параметры его обозначим a_1 и σ_1.

В ряде случаев удобно пользоваться не десятичными, а натуральными логарифмами значений x_i случайной величины X.

Так как

$$Y_1=\frac{1}{M}Y=2{,}303\ Y, \tag{2}$$

где $Y=\lg X$, то имеют место следующие формулы:
функция распределения величины X

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}dt, & x>0,\\ 0 & x\leqslant 0;\end{cases} \tag{3}$$

плотность распределения величины X

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, & x>0,\\ 0 & x\leqslant 0.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь

$$a_1=2{,}303\ a; \tag{5}$$

$$\sigma_1=2{,}303\ \sigma, \tag{6}$$

где a и σ определяются как в разд. 1 настоящего стандарта

2. Для нахождения оценок и доверительных границ параметров a_1 и σ_1 следует использовать правила разд. 2—6 настоящего стандарта с заменой a, σ на a_1, σ_1 и десятичных логарифмов на натуральные.

3. Формулы (1) и (2) справочного приложения 3 для математического ожидания и дисперсии величины X преобразуются в

$$m_1=e^{a_1+\frac{\sigma_1^2}{2}}; \tag{7}$$

$$m_2=m_1^2\left(e^{\sigma_1^2}-1\right). \tag{8}$$

Для нахождения оценок математического ожидания и дисперсии, а также доверительных границ для математического ожидания (с использованием нату-

ральных логарифмов) формулы (3)—(6) справочного приложения 3 преобразуются в следующие:

$$\ln \overline{m}_1 = \overline{a}_1 + \frac{s_1^2}{2}; \tag{9}$$

$$\overline{m}_2 = \overline{m}_1^2 (e^{\frac{s_1^2}{2}} - 1); \tag{10}$$

$$\ln m_{1н} = \overline{a}_1 + \frac{s_1^2}{2} - u_\gamma \frac{s_1}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2 s_1^2}; \tag{11}$$

$$\ln m_{1в} = \overline{a}_1 + \frac{s_1^2}{2} + u_\gamma \frac{s_1}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2 s_1^2}. \tag{12}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Справочное

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАНДАРТА

1. Логарифмически нормальное распределение весьма часто встречается на практике. Оно возникает в задачах надежности (срок службы некоторых типов изделий [4]), при различных биологических измерениях, в экономических исследованиях и др. Ему, как правило, подчиняются размеры частиц при дроблении, и поэтому оно встречается в геологии (процентное содержание минералов в породе), в химической и пищевой промышленности (размеры взвешенных частиц) и др. (подробный обзор приведен в [3]).

2. На практике также встречается трехпараметрическое логарифмически нормальное распределение; это значит, что для некоторого $c \geqslant 0$ величина $\ln(X-c)$ имеет нормальное распределение. В стандарте рассмотрен наиболее распространенный случай $c=0$.

На практике обычно даже при $c>0$ значение c известно. Тогда правила стандарта следует применять не к самой величине X, а к $X-c$.

Если значение c заранее неизвестно, то рекомендуется следующая оценка [3]

$$c=\frac{x_{\min}\, x_{\max}-x^2_{(1/2)}}{x_{\min}+x_{\max}-2x_{(1/2)}}, \qquad (1)$$

где $x_{\min}$, $x_{\max}$, $x_{1/2}$ — соответственно наибольший и наименьший элементы выборки и медиана выборки.

Эту оценку можно применять при достаточно больших объемах выборок (не менее 20) и больших размахах выборки (не менее чем в 5 раз превышающих $x_{(1/2)}$).

3. Стандарт предназначен для случая, когда уже известно, что распределение изучаемой случайной величины логарифмически нормально, и требуется оценить его параметры (см. вводную часть). Поэтому в стандарте не рассматривается вопрос о том, как отличать логарифмически нормальное распределение от других видов распределений, хотя именно этому вопросу посвящена обширная литература.

Однако следует иметь в виду, что, на не слишком больших отрезках функция логарифмически нормального распределения мало отличается от функции нормального распределения. Поэтому рекомендуется следующее правило [1]: если распределение логарифмически нормально, но выборочный коэффициент вариации, т. е. отношение выборочной дисперсии к выборочному среднему, меньше 0,3, то можно считать, что исследуемая величина распределена нормально, и обрабатывать данные соответствующим образом.

4. Формулы разд. 2—4 настоящего стандарта получены потенцированием из соответствующих формул ГОСТ 11.004—74. Тем самым для нахождения доверительных границ используются:

t_γ — γ-квантили распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы (табл. 2 настоящего стандарта);

u_γ — γ-квантили стандартного нормального распределения (табл. 3 настоящего стандарта);

величины

$$z_{\text{н}}=\sqrt{\frac{K}{\chi^2_\gamma(K)}}, \qquad (2)$$

$$z_{\text{в}}=\sqrt{\frac{K}{\chi^2_{1-\gamma}(K)}}, \qquad (3)$$

где $\varkappa^2_\gamma(K)$, $\varkappa^2_{1-\gamma}(K)$ — соответственно γ- и $(1-\gamma)$-квантили распределения χ^2 с K степенями свободы (табл. 4 и 5 настоящего стандарта).

5. Выборка называется неполной, если имеет место один из следующих случаев:

а) относительно части значений случайной величины известно только, что они меньше некоторого числа d, а остальные значения $x_i \geqslant d$ известны;

б) относительно части значений случайной величины известно только, что они больше некоторого числа d', а остальные значения $x_i \leqslant d'$ известны *.

Если число отброшенных элементов неизвестно, то выборка называется усеченной слева в случае *а* и усеченной справа в случае *б*.

Если число отброшенных элементов известно, то выборка называется цензурированной слева в случае *а* и цензурированной справа в случае *б*.

Цензурированные выборки возникают, в частности, в различных планах испытаний на надежность, приведенных в ГОСТ 16504—74.

Пример получения усеченной выборки см. в справочном приложении 1 (пример 9).

6. Оценки параметров a и σ для непольных выборок получены методом максимального правдоподобия [1], [3]. Для записи уравнений правдоподобия обозначим

$$z=\begin{cases}\dfrac{\bar{a}-\lg d}{s} & \text{для выборки, усеченной или цензурированной слева}\\[2ex] \dfrac{\lg d'-a}{s} & \text{для выборки, усеченной или цензурированной справа}\end{cases} \tag{4}$$

$$f_1(z)=\frac{e^{-z^2/2}}{\int\limits_{\infty-}^{z} e^{-t^2/2}\,dt}; \tag{5}$$

$$G=\begin{cases}\dfrac{1}{f_1(-z)-z} & \text{— в случае усеченной выборки;} \quad (6)\\[2ex] \dfrac{h}{hf_1(z)-(1-h)z} & \text{— в случае цензурированной выборки} \quad (7)\end{cases}$$

(обозначения параметров, входящих в эти формулы, даны в разд. 5 настоящего стандарта).

Тогда уравнения правдоподобия имеют вид

$$\begin{cases} v=G\cdot(G-z), & (8)\\ s=G\cdot v, & (9)\end{cases}$$

где v определяется по формуле (18) настоящего стандарта.

Функция $z=z(v)$, обратная к правой части уравнения (8), табулирована в табл. 6 настоящего стандарта, для случая цензурированной выборки (т. е. для G, определяемой по формуле (7)) и в табл. 8 настоящего стандарта для усеченной выборки (т. е. для G, определяемой по формуле (6)).

* В некоторых случаях имеют место сразу и *а* и *б*, но эти случаи не рассматриваются в стандарте.

Значения функции $f_1(z)$ приведены во втором столбце табл. 7 настоящего стандарта. Во втором столбце табл. 9 настоящего стандарта приведены значения функции G, определенной по формуле (6); для единообразия она обозначена в этой таблице через $g_1(z)$.

Таким образом получены формулы (19), (20), (25), (26), (27) настоящего стандарта.

В соответствующих столбцах табл. 6 и 8 настоящего стандарта приведены значения дисперсий полученных оценок $\bar{a}$ и s в зависимости от z. Формулы (21)—(24) и (28)—(31) настоящего стандарта основаны на приближенной нормальности этих оценок (см. [1], [5]). Табл. 5—8 настоящего стандарта взяты из [5].

7. Формулы (5), (6) справочного приложения 3 и (11), (12) справочного приложения 4 также основаны на приближенной нормальности оценки математического ожидания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями, М., ИЛ, 1956.

2. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Сов. радио», 1968.

3. Aitchison Y., Brown Y. The Lognormal Distribution, Cambridge Univ. Press, 1957.

4. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука, 1965.

5. Hald A. Statistical Tables and Formulas, J. Wiley & Sons, N. M., 1952.

Редактор *Р. С. Федорова*
Технический редактор *В. Н. Прусакова*
Корректор *Л. А. Пономарева*

Сдано в наб. 24.10.79 Подп. в печ. 18.02.80 2,0 п. л. 1,52 уч.-изд. л. Тир. 16000 Цена 10 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов. 123557, Москва, Новопресненский пер., 3
Тип. «Московский печатник». Москва, Лялин пер., 6. Зак. 1455