ГОССТАНДАРТ РОССИИ

РЕКОМЕНДАЦИЯ

Государственная система обеспечения единства измерений

ГРАДУИРОВОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ. ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

МИ 2175-91

Экз. № _______

ВНИИМ им. Д.И. Менделеева

Санкт-Петербург

1997

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ДАННЫЕ

1. РАЗРАБОТАНА НПО "ВНИИМ им. Д.И. Менделеева", впервые.

2. ИСПОЛНИТЕЛИ:

к.ф.-м.н. Т.Н. Сирая (руководитель темы),
к.т.н. А.Г. Чуновкина.

3. УТВЕРЖДЕНА НПО "ВНИИМ им. Д.И. Менделеева" 29.03.91

4. ЗАРЕГИСТРИРОВАНА ВНИИМС: МИ 2175-91

Изготавливается и распространяется по заказам.

Телефон для справок: (812) 259-10-30

ГОСУДАРСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Р Е К О М Е Н Д А Ц И Я

ГРАДУИРОВОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ. ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

М И 2175-91

Дата введения - 01.01.92

Настоящая рекомендация устанавливает порядок построения градуировочных характеристик (ГХ) средств измерений (СИ) в табличном, графическом и аналитическом виде, выбор функционального вида ГХ и методов построения ГХ, способы оценивания погрешностей для линейных, полиномиальных и приводимых к линейным ГХ, а также способы оценивания погрешностей результатов измерений при использовании линейных ГХ

Положения настоящей рекомендации могут быть использованы при разработке методик выполнения измерений (МВИ), методик поверки СИ, в которых предусмотрено построение ГХ СИ.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Под ГХ средства измерений (измерительного преобразователя или прибора) понимается функциональная зависимость между входной (X) и выходной (Y) величинами

$$Y = f(X),$$

построенная на основе результатов измерений входных и соответствующих выходных величин в m точках диапазона: (x_i, y_i), $i = 1,..., m$.

1.2. ГХ может быть представлена:

таблицей;

графиком (построенным со сглаживанием или без сглаживания);

формулой (в аналитическом виде).

1.3. Различаются индивидуальные ГХ, построенные для конкретных экземпляров СИ, и типовые ГХ, построенные для группы однотипных СИ.

1.4. Погрешность ГХ $Y = f(X)$ в точке X определяется как разность между значением ГХ в точке X и истинным значением величины Y в точке X.

$$\Delta(X) = f(X) - Y.$$

1.5. Могут оцениваться следующие характеристики погрешностей:

$\Delta(X)$ - границы (суммарной) погрешности ГХ в точке X;

Δ - границы погрешности ГХ по всему диапазону изменения X;

$S(X)$ и $\theta(X)$ - СКО случайной и границы систематической составляющих погрешности ГХ в точке X;

$\varepsilon(X)$ и $\theta(X)$ - границы случайной и систематической составляющих погрешности ГХ в точке X.

Примечание. В необходимых случаях могут использоваться другие характеристики погрешности ГХ по МИ 1317-86, которые должны быть указаны в МВИ.

1.6. При задании доверительных границ случайной погрешности $\varepsilon(X)$, а также границ $\Delta(X)$ и $\theta(X)$, если они получены статистическими методами, необходимо указывать доверительную вероятность P. Обычно при массовых измерениях (если не оговаривается противное) рекомендуется принимать $P = 0{,}95$. При измерениях высшей точности и эталонных измерениях рекомендуется использовать $P = 0{,}99$. В обоснованных случаях в МВИ могут быть указаны и другие значения P.

1.7. Если для погрешностей ГХ определены характеристики случайной и систематической составляющих $S(X)$ и $\theta(X)$, то приближенные доверительные границы суммарной погрешности $\Delta(X)$ находят следующим образом:

если $r = \theta(X)/S(X) < 0{,}8$, то принимают $\Delta(X) = \varepsilon(X)$;

если $r > 8$, то принимают $\Delta(X) = \theta(X)$;

если $0{,}8 < r < 8$, то $\Delta(X)$ вычисляют по формуле:

$$\Delta(X) = K[\varepsilon(X) + \theta(X)],$$

где коэффициент K принимают равным 0,8 при P = 0,95 и 0,85 при P = 0,99.

2. ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ГРАДУИРОВОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. При построении ГХ в общем случае рекомендуется придерживаться следующей последовательности операций:

получение исходных экспериментальных данных x_i, y_i, $i = 1,\dots, m$;

выбор способа представления и функционального вида ГХ;

выбор метода построения ГХ;

оценивание параметров ГХ и построение искомой ГХ;

оценивание погрешностей ГХ;

проверка адекватности построенной ГХ экспериментальным данным.

Примечание. При табличном или графическом способах представления ГХ этапы, связанные с оцениванием параметров ГХ опускают.

2.2. Исходные данные для построения индивидуальных ГХ (X_i, Y_i), $i = 1,\dots, m$, могут быть получены из прямых или косвенных измерений. Обработка данных при этом выполняется в соответствии с ГОСТ 8.207-76 (при прямых измерениях с многократными наблюдениями), МИ 1552-86 (при прямых измерениях с однократными наблюдениями), МИ 2083-90 (при косвенных измерениях).

2.3. Исходные данные для построения типовых ГХ могут быть либо исходными данными по п. 2.2, полученными для группы однотипных СИ, либо построенными по указанным данным индивидуальными ГХ для отдельных СИ. В последнем случае порядок построения типовой ГХ может отличаться от излагаемого в данной рекомендации общего порядка по п. 2.1 и должен быть установлен в конкретных МВИ

2.4. При выполнении измерений входных и выходных величин могут быть случаи планируемого или непланируемого эксперимента.

2.4.1. В случае планируемого эксперимента исследователь выбирает значения входных величин X_i, $i = 1,..., m$, при которых будут выполняться измерения выходных величин, и число наблюдений n_i в каждой точке. Для получения исходных экспериментальных данных последовательно воспроизводят выбранные значения входных величин X_i, $i = 1,..., m$ и измеряют соответствующие им выходные величины Y_i (выполняют n_i наблюдений).

2.4.2. В случае непланируемого эксперимента значения x_i входных величин не могут быть выбраны исследователем, а определяются условиями эксперимента. Для получения экспериментальных данных в этом случае последовательно измеряют каждую входную величину X_i и соответствующую выходную величину Y_i, $i = 1,..., m$.

Примечания. 1. Вопросы планирования измерительных экспериментов при построении ГХ выходят за рамки данной рекомендации и должны решаться в конкретных МВИ. При этом целесообразно использовать методы планирования экспериментов, приведенные в [15] (приложение 6).

2. В соответствии с постановкой задачи построения ГХ по п. 1.1 в данной рекомендации рассматривается лишь случай однофакторного эксперимента.

2.5. Способ представления ГХ (табличный, графический или аналитический) определяется:

возможностью аппроксимации ГХ функцией простого аналитического вида;

требуемой точностью построения ГХ;

способом использования построенной ГХ.

Способ представления ГХ устанавливается в конкретных МВИ.

2.6. Порядок построения ГХ зависит от способа ее представления.

2.6.1. При построении ГХ в виде таблицы выполняют операции по п. 2.4 и представляют полученные результаты измерений в виде таблицы (x_i, y_i), $i = 1,..., m$.

Примечание. Значения ГХ в промежуточных точках находят по значениям в двух ближайших точках путем линейной интерполяции (если в конкретной МВИ не предусмотрен иной способ).

2.6.2. При построении ГХ в виде графика (без сглаживания) выполняют операции по п. 2.4, и далее:

наносят полученные точки (x_i, y_i) на график;

соединяют точки отрезками прямой.

2.6.3. При построении ГХ в виде графика (со сглаживанием) выполняют операции по п. 2.4, и далее:

выбирают вид аппроксимирующей линии и метод ее графического построения по точкам;

выполняют графическое построение аппроксимирующей линии

Примечание. В качестве аппроксимирующей линии чаще всего принимается прямая или несколько отрезков прямой.

2.7. В случае аналитического представления ГХ выбор ее функционального вида выполняют на основе:

сведений о требуемом или возможном функциональном виде ГХ;

физических соотношений, описывающих свойства СИ или явления, лежащие в основе их действия;

результатов предыдущих исследований подобных СИ;

результатов предварительного анализа полученных экспериментальных данных;

требований к точности построения ГХ.

2.7.1. Функциональный вид ГХ следует выбирать по возможности простым, с небольшим числом параметров. Наиболее удобными являются ГХ, в которые параметры входят линейно.

При выборе вида ГХ рекомендуется ориентироваться на основные группы функций, приведенные в разд. 3. В необходимых случаях можно использовать комбинации указанных видов функций (в том числе, линейные комбинации, произведения или суперпозиции функций)

2.7.2. При необходимости возможно разбиение диапазона на отдельные интервалы и построение ГХ различных видов на интервалах. Требования к согласованию ГХ на соседних интервалах задаются в конкретных методиках.

2.8. Сводная таблица основных методов построения ГХ (для перечисленных в разд. 3 видов ГХ) в зависимости от имеющейся априорной информации приведена в разд. 3.

Конкретные методы построения ГХ приведены:

для линейных ГХ - в разд. 5÷7;

для нелинейных ГХ, приводимых к линейным - в разд. 8;

для полиномиальных ГХ - в разд. 9.

2.9. При выборе функционального вида ГХ по п. 2.7, после построения ГХ необходимо проверить адекватность принятого вида ГХ экспериментальным данным. Простые критерии проверки адекватности приведены в приложении 1.

Если вид ГХ выбран неверно, то следует повторить процедуру выбора, учитывая дополнительную информацию и, возможно, привлекая дополнительные экспериментальные данные.

2.10. Общие принципы оценивания погрешностей построенных ГХ изложены в разд. 4. Конкретные формулы для оценивания погрешностей приведены:

для линейных ГХ - в разд. 5÷7;

для нелинейных ГХ, приводимых к линейным - в разд. 8,

для полиномиальных ГХ - в разд. 9.

3. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВИДЫ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

3.1. При аналитическом представлении ГХ наиболее важными для практики являются три группы функциональных зависимостей:

линейные ГХ;

нелинейные ГХ вида $U(Y) = a + b\,V(X)$;

приводимые к линейным путем замены переменных:

$$Y^{*} = a + b\,X^{*}, \quad X^{*} = V(X), \quad Y^{*} = U(Y);$$

нелинейные ГХ, являющиеся линейными комбинациями известных функций:

$$Y = \Sigma\, a_j\, g_j(X),$$

где g_j - известные функции; a_j - определяемые коэффициенты.

3.2. Линейные ГХ в конкретных случаях могут быть представлены в виде:

1) $Y = a + b\,X$ - линейная ГХ общего вида;

2) $Y = a + b\,(X - \overline{X})$ - линейная ГХ, приведенная к средней точке $\overline{X}$;

3) $Y = b\,X$ - линейная ГХ, проходящая через начало координат.

Методы построения линейных ГХ, приводятся в разд. 5÷7.

3.3. Основными видами нелинейных ГХ, приводимых к линейным путем преобразования переменных, являются степенные, показательные и дробно-линейные функции. Соответствующие преобразования переменных, а также правила выбора подходящей аппроксимации ГХ приведены в приложении 2.

Методы построения ГХ данного вида приведены в разд 8

3.4 Основными видами нелинейных ГХ, представимых линейными комбинациями известных функций являются:

1) алгебраические полиномы степени k:

$$Y = \sum_{j=1}^{k} a_j X^j,$$

где k обычно невелико ($k \le 5$);

2) разложения по ортогональным полиномам

$$Y = \sum_{j=0}^{k} b_j P_j(X),$$

где P_j - полином степени j; $P_0, \ldots, P_k$ ортогональны относительно точек X_i.

$$\sum_{i=1}^{m} P_k(X_i) P_q(X_i) = 0 \text{ при } k \ne q.$$

3) тригонометрические полиномы

$$Y = \sum_{q=1}^{k}\left(a_q \sin(qX) + b_q \cos(qX)\right).$$

Правила выбора степени алгебраического полинома приведены в приложении 3.

Методы построения ГХ производятся на основе следующих априорных данных (сведений):

о функциональном виде ГХ (по п. 3.1);

о виде распределения случайных погрешностей измерений величин X_i и Y_i, в частности, гауссовский или отличный от него;

о характеристиках погрешностей измерений X_i и Y_i, в частности, характеристики могут быть заданы априори или оценены по экспериментальным данным; постоянны или переменны по диапазону значений X_i и Y_i, причем веса могут быть заданы априори или оценены;

о значениях входных величин X_i, в частности,

X_i известны точно (или погрешности X_i пренебрежимо малы по сравнению с погрешностями Y_i);

X_i известны с погрешностями, но имеется дополнительная информация об их дисперсиях.

Примечание. Проверка гипотезы о гауссовском распределении погрешностей производится согласно ГОСТ 8.207-76.

3.6. Если ГХ имеет линейный или полиномиальный вид и значения X_i известны точно, то для построения ГХ используют:

1) в случае гауссовских распределений погрешностей измерений Y_i - метод наименьших квадратов (МНК); формулы приведены в разд. 5, 9;

2) в случае отличных от гауссовских распределений погрешностей измерений Y_i - робастные методы (усеченный МНК или М-оценки Хубера; формулы приведены в разд. 6.

3.7. Если ГХ является линейной и погрешности измерений X_i существенны, то для построения ГХ используют:

1) в случае гауссовского распределения погрешностей и планируемого эксперимента - МНК; особенности его применения в этом случае изложены в разд. 8;

2) в случае непланируемого эксперимента - один из конфлюентных методов. Выбор конкретного метода в зависимости от дополнительной информации и расчетные формулы приведены в разд. 7.

3.8. Основные методы построения ГХ, приведенные в настоящей рекомендации, перечислены в табл. 1. Выбор конкретного метода производится согласно табл. 1 в зависимости от наличия априорной информации по п. 3.5.

Примечания. 1. Методы с номерами 1÷5, 7, 9÷12, 17 являются наиболее простыми и рекомендуются для широкого использования в метрологической практике (в том числе, метрологических служб).

2. Методы с номерами 6, 8, 13÷16, 18÷20 рекомендуются для использования в научных исследованиях.

Таблица 1

Выбор методов построения градуировочных характеристик

№	Априорная информация				МЕТОДЫ построения ГХ	Раздел МИ
	Функциональный вид ГХ	Распределения погрешностей	Дисперсии погрешностей	Значения аргументов X_i		
1	2	3	4	5	6	7
1	Линейный	Гауссовские	Постоянны	Точные	Метод наименьших квадратов (МНК)	5
2			Известны веса		МНК с весами	

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
3	Линейный	Гауссовские	Постоянны	Планируемы	МНК с учетом приведенных погрешностей	7
4		Близки к гауссовским		Точные	Усеченный МНК	6
5			Известны веса		Усеченный МНК с весами	
6					М-оценки Хубера	
7		Гауссовские	Известны σ_x^2 или σ_y^2	Содержат погрешности	Модифицированный МНК	7
8			Известно $\lambda = \sigma_x^2/\sigma_y^2$		Метод ортогональной регрессии	
9		Произвольны	Постоянны	Известен порядок X_i	Дробно-линейные оценки	
10				Равномерны по диапазону	Оценка Хаузнера-Бреннана	
11				Разбиты на 2 или 3 группы	Оценки Вальда или Бартлетта	

(Продолжение)

1	2	3	4	5	6	7
12	Приводим к линейному	Гауссовские	Постоянны	Точные	МНК с весами	8
13			Известны веса		МНК с модифицированными весами	
14		Близки к гауссовским			М-оценки Хубера с весами	6
15		Гауссовские	Постоянны	Планируемы	МНК с учетом погрешностей X_i	7
16			Известны σ_x^2 или σ_y^2	Содержат погрешности	Модифицированный МНК	
17	Полином		Постоянны	Точные	МНК	9
18			Известны веса		МНК с весами	
19		Близки к гауссовским	Постоянны		Усеченный МНК	6
20					М-оценки Хубера	

4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

4.1. При оценивании погрешностей ГХ используются характеристики погрешностей результатов измерений входных и выходных величин. При этом возможны два основных варианта:

заданы границы погрешностей Δ_x и Δ_y;

заданы характеристики составляющих:

S_x и S_y - СКО случайных погрешностей;

θ_x и θ_y - границы систематических погрешностей.

В первом случае целесообразно оценивать границы суммарной погрешности ГХ в точке $\Delta(X)$ или общие границы по диапазону Δ.

Во втором случае следует также оценивать характеристики составляющих погрешности ГХ $S(X)$, $\theta(X)$; при необходимости границы суммарной погрешности ГХ находят согласно п. 1.7.

4.2. Случайные погрешности измерений входных и выходных величин X_i и Y_i предполагаются взаимно некоррелированными.

Примечание. Возможность коррелированных погрешностей должна быть отмечена в конкретных методиках.

4.3. При построении ГХ в виде таблицы или графика (без сглаживания) оценивают погрешности ГХ в точках X_i.

4.3.1. Если заданы границы погрешностей измерений величин X_i и Y_i, то границы погрешности ГХ оценивают по формулам:

в точке X: $$\Delta(X) = \Delta_y + |c(X)|\Delta_x;$$

по диапазону. $$\Delta = \Delta_y + C\Delta_x;$$

где $c(X) = dY(X)/dX$; $C = \max|c(X)|$.

Если нет априорных данных о коэффициентах $c(X)$, то можно принять:

$$C = \max\{|y_{i+1} - y_i|/|x_{i+1} - x_i|\}.$$

4.3.2. Если заданы характеристики составляющих погрешностей входных и выходных величин, то характеристики погрешностей ГХ в точке X оценивают по формулам:

$$\theta(X) = \theta_y + |c(X)|\theta_x; \qquad S(X) = \sqrt{S_y^2 + c^2(X)S_x^2}.$$

Доверительные границы случайной погрешности ГХ в точке X оценивают по формуле:

$$\varepsilon(X) = t_k(P)S(X),$$

где $t_k(P)$ - коэффициент Стьюдента при вероятности P с числом степеней свободы $k = \min(n_x - 1, n_y - 1)$; n_x и n_y - объемы выборок при оценивании S_x и S_y.

4.4. При построении ГХ в виде функции принятого вида:

$$Y = F(X, a_1, ..., a_k),$$

оценивание погрешностей ГХ выполняют на основе линеаризованного разложения согласно формулам, приведенным в приложении 4.

4.5. Если дополнительно известно, что погрешности исходных данных x_i и y_i или их систематические составляющие изменяются нерегулярным образом в заданных границах, то можно построить приближенные доверительные границы погрешности ГХ в точке X или ее систематической составляющей. Формулы для вычисления указанных границ приведены в приложении 4.

5. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ТОЧНО ИЗВЕСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН И ГАУССОВСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1. Для построения линейной зависимости при точно известных значениях входных величин X_i и гауссовских распределениях погрешностей измерений выходных величин используют МНК. При этом линейную ГХ представляют в виде

$$Y = a_0 + b \cdot \left(X - \overline{X}\right).$$

где $\overline{X}$ - среднее (взвешенное) значений X_i.

Относительно выполнения измерений выходных величин Y можно выделить три основных случая:

равноточные однократные измерения;

равноточные многократные измерения;

неравноточные измерения с известными или оцениваемыми весами.

В случае равноточных многократных измерений оценки коэффициентов ГХ вычисляют по формулам:

$$a_0 = \overline{y} = \sum_{1}^{m} n_i \overline{y}_i / N;$$

$$b = \sum_{1}^{m} n_i \overline{y}_i \left(X_i - \overline{X}\right) \Big/ \sum_{1}^{m} n_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

где

$$\overline{X} = \sum_{1}^{m} n_i X_i / N; \qquad N = \sum_{1}^{m} n_i; \qquad \overline{y}_i = \sum_{1}^{n_i} y_{ij} / n_i.$$

5.3. Если заданы границы погрешностей измерений Y_i, то границы погрешностей определения коэффициентов a_0, b вычисляют по формулам (см. табл. 2):

$$\Delta(a_0) = \Delta; \qquad \Delta(b) = \Delta R_b,$$

где $\quad R_b = \sum_{1}^{m} n_i \left|X_i - \overline{X}\right| \Big/ \sum_{1}^{m} n_i (X_i - \overline{X})^2.$

Границу погрешности ГХ в точке X вычисляют по формуле: $\Delta(X) = \Delta R_x$, где $R_x = 1 + \left|X - \overline{X}\right| \cdot R_b$.

Таблица 2

Характеристики погрешностей МНК-оценок

Характеристики погрешностей		
СКО	Детерминированные границы	Доверительные границы
Случайная погрешность		
$S(a_0) = S/\sqrt{N}$ $S(b) = S \cdot V_b$ $S(X) = S \cdot V(X)$	-	$\varepsilon(a_0) = t_k(P) \cdot S/\sqrt{N}$ $\varepsilon(b) = t_k(P) \cdot S \cdot V_b$ $\varepsilon(X) = t_k(P) \cdot S \cdot V(X)$
Систематическая погрешность		
-	$\theta(a_0) = \theta$ $\theta(b) = \theta \cdot R_b$ $\theta(X) = \theta \cdot R_x$	$\theta_p(a_0) = z_p \cdot \theta \cdot V_a^{*}/\sqrt{3}$ $\theta_p(b) = z_p \cdot \theta \cdot V_b^{*}/\sqrt{3}$ $\theta_p(X) = z_p \cdot \theta \cdot V^{*}(X)/\sqrt{3}$
Суммарная погрешность		
-	$\Delta(a_0) = \Delta$ $\Delta(b) = \Delta \cdot R_b$ $\Delta(X) = \Delta \cdot R_x$	$\Delta(a_0) = z_p \cdot \Delta/\sqrt{3N}$ $\Delta(b) = z_p \cdot \Delta \cdot V_b/\sqrt{3}$ $\Delta(X) = z_p \cdot \Delta \cdot V(X)/\sqrt{3}$

5.4. Если заданы характеристики составляющих погрешностей измерений Y_i, то характеристики погрешностей коэффициентов и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$S(a_0) = S/\sqrt{N}; \quad S(b) = S \cdot V_b; \quad S(X) = S \cdot V(X);$$

$$\theta(a) = \theta; \quad \theta(b) = \theta \cdot R_b; \quad \theta(X) = \theta \cdot R_x,$$

где $V_b = 1\Big/\sqrt{\sum\limits_1^m n_i (X_i - \overline{X})^2}$; $\quad V(X) = \sqrt{1/N + (X - \overline{X})^2 \Big/ \sum\limits_1^m n_i (X - \overline{X})^2}$.

5.5. Если известно, что погрешности измерений Y_i изменяются нерегулярным образом в заданных границах $\pm\Delta$, то приближенные доверительные границы погрешностей коэффициентов и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\Delta(a_0) = z_p \cdot \Delta/\sqrt{3N}; \quad \Delta(b) = z_p \cdot \Delta \cdot V_b/\sqrt{3}; \quad \Delta(X) = z_p \cdot \Delta \cdot V(X)/\sqrt{3}.$$

5.6. Если известно, что систематические погрешности измерений Y_i изменяются нерегулярным образом в заданных границах $\pm\Delta$, то приближенные доверительные границы систематических погрешностей коэффициентов и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\theta_p(a_0) = z_p \cdot \theta \cdot V'_a/\sqrt{3}; \quad \theta_p(b) = z_p \cdot \theta \cdot V'_b/\sqrt{3}; \quad \theta_p(a_0) = z_p \cdot \theta \cdot V'(X)/\sqrt{3},$$

где $V'_a = \dfrac{1}{N}\sqrt{\sum\limits_1^m n_i^2}$, $\quad V'_b = \sqrt{\sum\limits_1^m n_i^2 (X_i - \overline{X})^2} \Big/ \sum\limits_1^m n_i (X_i - \overline{X})^2$;

$$V'(X) = \sqrt{(V'_a)^2 + (X - \overline{X})^2 (V'_b)^2}.$$

5.7. Доверительные границы случайных погрешностей коэффициентов и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\varepsilon(a_0) = t_k(P) \cdot S/\sqrt{N}; \quad \varepsilon(b) = t_k(P) \cdot S \cdot V_b; \quad \varepsilon(X) = t_k(P) \cdot S \cdot V(X),$$

где $t_k(P)$ - коэффициент Стьюдента, с числом степеней свободы k, соответствующим используемой оценке СКО S.

5.7.1. Если используют оценку СКО

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \left[a_0 + b\cdot(X_i - \bar{X})\right]\right)^2 \Big/ (N-2)},$$

то число степеней свободы $k = N - m$.

5.7.2. При необходимости совместного оценивания случайных погрешностей расчетных значений ГХ в q точках $X_1,\ldots,X_q$ совместные доверительные границы вычисляют по формулам:

$$\varepsilon(X_i) = f(q,k)\cdot S(X_i),$$

где f(q,k) - квантиль распределения Фишера с числом степеней свободы q и k (соответствующим используемой оценке СКО).

5.8. В случае равноточных измерений, однократных или одинаковой кратности ($n_i = n$) вычисление коэффициентов ГХ и оценивание погрешностей ГХ выполняют аналогично пп. 5.2 - 5.7, используя упрощенные формулы для коэффициентов a_0, b и вспомогательных величин V, R, которые приведены в табл. 3. В случае однократных измерений используется оценка СКО S (см. п. 5.7), которой соответствует число степеней свободы m - 2.

5.8. В случае неравноточных измерений при вычислении коэффициентов и оценивании погрешностей ГХ используют веса ω_i отдельных результатов y_i, которые определяют, исходя из оценок дисперсий случайных погрешностей выходных величин с учетом сведений о их систематических погрешностях.

Примечание. Если полученные веса различаются незначительно или не приводят к значительному снижению погрешностей ГХ, то для упрощения расчетов можно их не вводить, а использовать более простые формулы для случая равноточных измерений. Поэтому после введения весов следует оценить СКО погрешностей ГХ с учетом весов и без их учета. Критерии целесообразности введения весов должны быть установлены в конкретных методиках, исходя из требований к точности построения ГХ.

Таблица 3

Оценки МНК и вспомогательные выражения для измерений равной кратности и однократных

Частные случаи измерений	МНК-оценки коэффициентов	Вспомогательные выражения
Равноточные, равной кратности $n_i = n$	$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{m}\bar{y}_i$ $b = \frac{\sum_{1}^{m}\bar{y}_i \cdot (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}$ $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{1}^{m}X_i$ $N = m \cdot n$	$V_a = 1/\sqrt{m}$ $V_b = 1\Big/\sqrt{n\sum_{1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}$ $R_b = \frac{\sum_{1}^{m}\lvert X_i - \bar{X}\rvert}{\sum_{1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}$ $V(X) = \sqrt{\frac{1}{m \cdot n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{n\sum_{1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}}$
Однократные равноточные $n_i = 1$	$a_0 = \frac{1}{m}\sum_{1}^{m}\bar{y}_i$ $b = \frac{\sum_{1}^{m}\bar{y}_i \cdot \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sum_{1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$	$V_a = 1/\sqrt{m}$ $V_b = 1\Big/\sqrt{\sum_{1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$ $R_b = \frac{\sum_{1}^{m}\lvert X_i - \bar{X}\rvert}{\sum_{1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$ $V(X) = \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{\sum_{1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}}$

5.10. Если при неравноточных измерениях

1) систематические погрешности результатов y_i постоянны или пренебрежимо малы;

2) известна зависимость дисперсии случайных погрешностей y_i от значений входной величины X_i:

$$S_i^2 = S^2 \cdot h(X_i),$$

где $h(X)$ - известная функция, то веса результатов y_i принимают равными

$$\omega_i = 1/h(X_i).$$

Примечание. Если известно, что дисперсии относительных погрешностей измерений Y_i остаются постоянными по диапазону, то веса принимают равными

$$\omega_i = y_i^{-2}.$$

5.11. Если при условии 1) п.5.10 выполняют многократные наблюдения в точке X_i, то для среднего значения $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/n_i$ принимают вес $\omega_i = n_i/S_i^2$, где $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2 / \left(n_i - 1\right)$ - оценка дисперсии наблюдений в точке X_i.

5.12. Если при неравноточных многократных измерениях в точках X_i исходные составляющие систематических погрешностей y_{iq} изменяются нерегулярным образом, в заданных границах $\pm\theta_{iq}$ и получены оценки y_{iq} в точках X_i (согласно п. 5.11), то для средних $\bar{y}_i$ принимают веса

$$\omega_i = \left(S_i^2/n_i + \sum_{q=1}^{k}\theta_{iq}^2/3\right)^{-1}$$

5.13. В случае неравноточных измерений оценки коэффициентов вычисляют по формулам:

$$a_0 = \bar{Y} = \sum_1^m \omega_i \bar{y}_i \Big/ \sum_1^m \omega_i ;$$

$$b = \sum_1^m \omega_i \cdot \bar{y}_i \cdot (X_i - \bar{X})^2 \Big/ \sum_1^m \omega_i (X_i - \bar{X})^2 ,$$

где $\bar{X} = \sum_1^m \omega_i X_i \Big/ \sum_1^m \omega_i$, ω_i - веса результатов $\bar{y}_i$.

5.14. Если веса определены согласно пп. 5.10, 5.11, то оценки погрешностей коэффициентов a_0 и b вычисляются по формулам, приведенным в табл. 4.

5.14.1. Если СКО S в п. 5.10 не задано заранее, то его оценивают по формуле

$$S = \sqrt{\sum_1^m \left[y_i - \left(a_0 + b \cdot (X_i - \bar{X})\right)\right]^2 \Big/ h(X_i) \cdot (m-2)} .$$

При этом коэффициенту Стьюдента $t_k(P)$ в формулах табл. 4 соответствует число степеней свободы $k = m - 2$.

5.14.2. Если оценка СКО S в п. 5.10 известна, то число степеней свободы принимают соответствующим этой оценке; если СКО известно точно, то вместо коэффициентов Стьюдента $t_k(P)$ используют квантили гауссовского распределения z_p.

5.15. Если веса определены с учетом систематических составляющих (согласно п. 5.12), то доверительные границы суммарных погрешностей коэффициентов a_0, b и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\Delta(a_0) = z_p \Big/ \sqrt{\sum_1^m \omega_i} ; \qquad \Delta(b) = z_p \Big/ \sqrt{\sum_1^m \omega_i \cdot (X_i - \bar{X})^2} ;$$

$$\Delta(X) = z_p \sqrt{1 \Big/ \sum_1^m \omega_i + (X - \bar{X})^2 \Big/ \sum_1^m \omega_i \cdot (X_i - \bar{X})^2}$$

Таблица 4

Оценки МНК и их характеристики для неравноточных измерений

<table>
<tr><td colspan="2">Веса ω_i</td><td>$1/h(X_i)$</td><td>n_i/S_i^2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">СКО случайных погрешностей</td><td>$S(a_0)$</td><td>$S\cdot V_a$</td><td>$1\Big/\sqrt{\sum_{1}^{m} n_i \cdot S_i^2}$</td></tr>
<tr><td>$S(b)$</td><td>$S\cdot V_b$</td><td>$1\Big/\sqrt{\sum_{1}^{m} n_i (X_i-\overline{X})^2/S_i^2}$</td></tr>
<tr><td>$S(X)$</td><td>$S\cdot V(X)$</td><td>$\sqrt{S^2(a_0)+(X-\overline{X})^2\cdot S^2(b)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Границы систематических погрешностей</td><td colspan="2">$\theta(a_0)=\theta_y$
$\theta(b)=\theta_y\cdot R_b$
$\theta(X)=\theta_y\cdot R(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Границы суммарных погрешностей</td><td colspan="2">$\Delta(a_0)=\Delta_y$
$\Delta(b)=\Delta_y\cdot R_b$
$\Delta(X)=\Delta_y\cdot R(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доверительные границы случайных погрешностей</td><td colspan="2">$\varepsilon(a_0)=t_k(P)\cdot S(a_0)$
$\varepsilon(b)=t_k(P)\cdot S(b)$
$\varepsilon(X)=t_k(P)S\cdot(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Границы систематических погрешностей</td><td colspan="2">$\theta(a_0)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V_a)/\sqrt{3}$
$\theta(b)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V_b)/\sqrt{3}$
$\theta(X)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V(X))/\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доверительные границы суммарных погрешностей</td><td colspan="2">$\Delta(a_0)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V_a)/\sqrt{3}$
$\Delta(b)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V_b)/\sqrt{3}$
$\Delta(X)=(z_p\cdot\theta_y\cdot V(X))/\sqrt{3}$</td></tr>
</table>

Примечания (к табл. 4):

$$V_a = 1\Big/\sqrt{\sum_1^m \omega_i}; \quad V_b = 1\Big/\sqrt{\sum_1^m \omega_i\left(X_i - \overline{X}\right)^2}; \quad V(X) = \sqrt{V_a^2 + \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \cdot V_b^2};$$

$$R_b = \sum_1^m \omega_i\left|X_i - \overline{X}\right| \Big/ \sum_1^m \omega_i\left(X_i - \overline{X}\right)^2; \qquad R(X) = 1 + \left|X_i - \overline{X}\right| \cdot R_b.$$

6. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ТОЧНО ИЗВЕСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН И РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН, ОТЛИЧНЫХ ОТ ГАУССОВСКИХ

6.1. Если значения входных величин X_i точно известны, а случайные погрешности измерений Y_i имеют распределения, близкие к гауссовским, но отличающиеся от строго гауссовских, либо могут содержать грубые погрешности, то для построения линейной ГХ вида $Y = a + b \cdot X$ рекомендуется использовать устойчивые методы, в частности, оценки Хубера или усеченные МНК-оценки.

6.2. При использовании устойчивых методов необходимо получить начальные приближения a_0, b_0 для коэффициентов ГХ, в качестве которых можно использовать:

МНК-оценки;

устойчивые оценки Вальда или Бартлетта.

6.2.1. Для получения устойчивых оценок Вальда или Бартлетта разбивают все экспериментальные точки на 2 или 3 группы равного объема (в порядке возрастания X_i) и находят медианы значений X_i и y_i по первой группе (X^I и y^I) и по второй (или третьей) группе (X^{II} и y^{II}). Оценки вычисляют по формулам:

$$b = (y^{II} - y^{I})/(X^{II} - X^{I}); \quad a = \overline{y} - b \cdot \overline{X}.$$

6.3. Устойчивые оценки Хубера находят путем итераций. На q-м шаге выполняют следующие операции

1) вычисляют отклонения данных от расчетной линии:

$$z_{iq} = y_i - (a_{q-1} + b_{q-1} \cdot X_i), \quad i = 1, \ldots, m;$$

2) вычисляют оценку СКО как медиану отклонений:

$$s_q = 1{,}48 \cdot \mathrm{med}\left[\left|z_{iq}\right|\right];$$

3) определяют значения u_{iq} и v_{iq}:

$$u_{iq} = \begin{cases} z_{iq}/s_q, & \text{при } \left|z_{iq}/s_q\right| < 1{,}5; \\ 1, & \text{при } \left|z_{iq}/s_q\right| > 1{,}5; \end{cases}$$

$$v_{iq} = \begin{cases} 1, & \text{при } \left|z_{iq}/s_q\right| < 1{,}5; \\ 0, & \text{при } \left|z_{iq}/s_q\right| > 1{,}5; \end{cases}$$

4) вычисляют суммы

$$h_{0q} = \sum_1^m u_{iq}; \qquad h_{1q} = \sum_1^m X_i \cdot u_{iq};$$

$$c_{1q} = \sum_1^m v_{iq}; \quad c_{1q} = \sum_1^m X_i \cdot v_{iq}; \quad c_{2q} = \sum_1^m v_{iq};$$

5) вычисляют приращения оценок

$$\Delta a_q = \left(h_{iq} \cdot c_{1q} - h_{0q} \cdot c_{2q}\right) / \left(c_{1q}^2 - c_{0q} \cdot c_{2q}\right);$$

$$\Delta b_q = \left(c_{iq} \cdot h_{0q} - c_{0q} \cdot h_{1q}\right) / \left(c_{1q}^2 - c_{0q} \cdot c_{2q}\right);$$

6) вычисляют новые значения коэффициентов

$$a_q = a_{q-1} + \Delta a_q; \qquad b_q = b_{q-1} + \Delta b_q;$$

7) итерационный процесс заканчивают либо после выполнения заданного числа шагов q, либо при выполнении правила останова:

$$\left|\Delta a_q\right| < d \cdot S(a_0); \qquad \left|\Delta b_q\right| < d \cdot S(b_0),$$

где $S(a_0)$, $S(b_0)$ - СКО начальных приближений, $d > 0$ -задано.

6.4. Для нахождения усеченных МНК-оценок выполняют следующие операции:

1) задают долю усечения $c = 0{,}05$ или $0{,}1$;
2) вычисляют остатки

$$z_i = y_i - (a + b \cdot X_i);$$

3) упорядочивают остатки:

$$z_1' < z_2' < \ldots < z_m';$$

4) исключают по $k = [mc]$ наименьших и наибольших остатков, где $[mc]$ - целая часть произведения mc;
5) по оставшимся экспериментальным данным вычисляют МНК-оценки коэффициентов a_0, b_0 (согласно формулам разд. 5);
6) погрешности построенной ГХ оценивают согласно общим правилам разд. 5

7. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН

7.1. Для построения линейной ГХ в случае, когда погрешности измерений входных и выходных величин имеют примерно одинаковый порядок и гауссовские распределения, а эксперимент является планируемым, рекомендуется использовать МНК и вычислять оценки согласно расчетным формулам разд. 5.

7.2. При оценивании погрешностей ГХ, построенных МНК, следует учитывать погрешности измерений как выходных, так и входных величин. В формулах разд. 5 следует заменить:

границы Δ - на $\Delta_y + |b| \cdot \Delta_x$ и

θ - на $\theta_y + |b| \cdot \theta_x$;

дисперсии S^2 - на $S_y^2 + b^2 \cdot S_x^2$.

7.3. При неравноточных измерениях веса отдельных результатов определяются с учетом погрешностей как измерений Y_i, так и измерений X_i

7.3.1. Если систематические погрешности измерений X_i и Y_i постоянны или пренебрежимо малы и заданы оценки дисперсий случайных погрешностей S_x^2 и S_y^2, то принимают веса

$$\omega_i = S_{\theta i}^{-2} = \left(S_{yi}^2 + b_0^2 \cdot S_{xi}^2\right)^{-1},$$

где начальное приближение b_0 находят на основе предварительного (например, графического) анализа данных.

7.3.2. Если систематические погрешности измерений X_i и Y_i постоянны или пренебрежимо малы и при этом выполняют многократные наблюдения выходных величин y_{ij} (каждый раз реализуя заданную величину X_i), то для результата $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/n_i$ принимают вес

$$\omega_i = n_i/S_{\theta i}^2, \quad S_{\theta i}^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2/(n_i - 1).$$

7.3.3. Если систематические составляющие погрешностей изменяются нерегулярным образом в заданных границах $\pm\theta_{xiq}$ и $\pm\theta_{yiq}$, и согласно п.п. 7.3.1 или 7.3.2 получены оценки дисперсии приведенных погрешностей $S_{\theta i}^2$, то принимают веса:

$$\omega_i = \left(S_{\theta i}^2/n_i + \sum_{q=1}^{k}(\theta_{xiq}^2 + \theta_{yiq}^2)/3\right)^{-1}.$$

7.4. Если погрешности измерений входных и выходных величин имеют примерно одинаковый порядок, то в случае непланируемого эксперимента следует использовать методы конфлюентного анализа При этом необходима дополнительная информация в одном из следующих вариантов:

1) известна одна из дисперсий погрешностей, σ_x^2 или σ_y^2, либо отношение дисперсий $r = \sigma_y^2/\sigma_x^2$ (либо оценки указанных параметров, полученные независимо от исходного набора данных);

2) имеются результаты многократных наблюдений (x_{ij}, y_{ij});

3) известен порядок возрастания исходных значений входных величин: $X_1<X_2<...<X_m$;

4) известно разбиение значений x_1, ..., x_m на группы, независимое от погрешностей измерений.

7.5. Если известна одна из дисперсий погрешностей измерений, или их отношение, и погрешности имеют гауссовские распределения, то рекомендуется использовать модифицированные МНК-оценки, приведенные в табл. 5. Соответствующие оценки коэффициента **a** вычисляют по формуле:

$$a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X}.$$

7.5.1. В табл. 5 для оценок указаны смещения B(b) (т.е. систематические сдвиги) и вторые моменты

$$M_2(b) = D(b) + B^2(b),$$

которые характеризуют как смещение, так и разброс оценок.

Примечания 1. Для сравнения в табл. 5 приведена также обычная МНК-оценка, которая в этом случае имеет существенное смещение.

2. Смещения модифицированных МНК-оценок малы и стремятся к 0 при увеличении числа точек m.

7.6.1. Если известна одна из дисперсий погрешностей, то рекомендуется использовать оценки b_1 или b_2, приведенные в табл. 5.

7.6.2. Если известно отношение отношение дисперсий r, то рекомендуется использовать обобщенную оценку ортогональной регрессии b_3.

7.7 Приближенные доверительные границы погрешностей коэффициента b и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\Delta(B) = t_k(P)\cdot\sqrt{(S_y^2 + b^2S_x^2)\Big/\sum_1^m (x_i - \overline{X})^2}\ ,$$

$$\Delta(X) = t_k(P)\cdot\sqrt{(S_y^2 + b^2S_x^2)\left(1/m + (X - \overline{X})^2\right)\Big/\sum_1^m (x_i - \overline{X})^2}\ ,$$

где $t_k(P)$ - коэффициенты Стьюдента с числом степеней свободы $k = \min(n_x - 1, n_y - 1)$.

7.8. При наличии многократных наблюдений в точках X_i (x_{iq}, y_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n_i$, $q = 1, ..., r_i$) и гауссовских распределений погрешностей измерений рекомендуется использовать модифицированные МНК-оценки, получаемые при подстановке в них оценок дисперсий S_x^2, S_y^2 (см. табл. 5), где

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^{r_i} (x_{iq} - \overline{x}_i)^2 \Big/ (R - m), \quad R = \sum_1^m r_i;$$

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \overline{y}_i)^2 \Big/ (N - m), \quad N = \sum_1^m n_i.$$

7.9. Если известен порядок возрастания истинных значений входных величин X_i или разбиение их на группы (независимое от их погрешностей), то рекомендуется использовать оценки приведенные в табл. 6.

Примечание. В табл. 6 приведены смещения оценок и их вторые моменты. Смещения дробно-линейных оценок (в отличие от обычной МНК-оценки b_0) стремятся к 0 при увеличении числа точек m.

Таблица 5

Модифицированные МНК-оценки

<table>
<tr><th>Известные параметры</th><th>Оценка</th><th>Смещение</th><th>Второй момент</th></tr>
<tr><td>σ_x^2 или оценка</td><td>$b_1 = \dfrac{\Sigma_{xy}}{\Sigma_x^2 - \sigma_x^2}$</td><td>$\dfrac{2 \cdot b \cdot \sigma_x^2}{(m-1) \cdot \Sigma_x^2}$</td><td rowspan="4">$\dfrac{\sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2}{(m-1) \cdot \Sigma_x^2}$</td></tr>
<tr><td>σ_x^2 или оценка</td><td>$b_2 = \dfrac{\Sigma_y^2 - \sigma_y^2}{\Sigma_{xy}}$</td><td>$\dfrac{b^2 \cdot \sigma_x^2 - \sigma_y^2}{b \cdot (m-1) \cdot \Sigma_x^2}$</td></tr>
<tr><td>$\lambda = \sigma_y^2 / \sigma_x^2$ или оценка</td><td>$b_0 = v \pm \sqrt{v^2 + \lambda}$, $v = \dfrac{\Sigma_y^2 - \lambda \cdot \Sigma_x^2}{2 \cdot \Sigma_{xy}}$</td><td>$\dfrac{2 \cdot \sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2}{b \cdot (m-1) \cdot \Sigma_x^2}$</td></tr>
<tr><td>—</td><td>$b_{МНК} = \dfrac{\Sigma_{xy}}{\Sigma_x^2}$</td><td>$-\dfrac{b \cdot \sigma_x^2 \cdot (m-3)}{(m-1) \cdot \Sigma_x^2}$</td></tr>
</table>

Примечания: $\Sigma_x^2 = \sum_1^m n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \Big/ (m-1)$; $\Sigma_y^2 = \sum_1^m n_i \cdot (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \Big/ (m-1)$;

$$\Sigma_{xy} = \sum_1^m n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot (\bar{y}_i - \bar{y}).$$

Таблица 6

Дробно-линейные оценки

Априорная информация	Оценка	Смещение	Второй момент
Порядок X_i	$b=\dfrac{\sum_1^m \omega_i \cdot y_i}{\sum_1^m \omega_i \cdot x_i}$, где $\sum_1^m \omega_i = 0$	$\dfrac{b \cdot \sigma_x^2 \cdot \Omega^2}{\Omega^2(X)}$	$\Omega^2 \cdot \dfrac{\sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2}{\Omega^2(X)}$
Разбиение на 2 или 3 группы	$b_W = \dfrac{y^{II} - y^{I}}{x^{II} - x^{I}}$	$\dfrac{b \cdot \sigma^2 \cdot m}{(x^{II} - x^{I})^2}$	$m \cdot \dfrac{\sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2}{(x^{II} - x^{I})^2}$
Равномерные значения $X_{i+1} = X_i + h$	$b_H = \dfrac{\sum_1^m y_i \cdot (m+1-2i)}{\sum_1^m x_i \cdot (m+1-2i)}$	$\dfrac{12 b \cdot \sigma_x^2}{m \cdot h^2 \cdot (m^2-1)}$	$\dfrac{12(\sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2)}{m \cdot h^2 \cdot (m^2-1)}$
Отсутствует (МНК)	$b_0 = \dfrac{\sum_1^m y_i \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_1^m x_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$	$\dfrac{-b \cdot \sigma_x^2 \cdot (m-3)}{\sum_1^m x_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$	$\dfrac{\sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2}{\sum_1^m x_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$

7.9.1. Для дробно-линейных оценок общего вида

$$b = \sum_{1}^{m} \omega_i \cdot y_i \Big/ \sum_{1}^{m} \omega_i \cdot x_i, \text{ где } \sum_{1}^{m} \omega_i = 0,$$

смещение имеет вид

$$B(b) = b \cdot S_x^2 \cdot \Omega^2 / \Omega^2(X), \text{ где } \Omega^2 = \sum_{1}^{m} \omega_i, \quad \Omega(X) = \sum_{1}^{m} \omega_i \cdot x_i,$$

а второй момент

$$M_2(b) = (S_y^2 + b^2 S_x^2) \cdot \Omega^2 / \Omega^2(X).$$

7.9.2. Приближенные доверительные границы погрешности ГХ в точке X вычисляют по формуле

$$\Delta(X) = t_k(P) \cdot \sqrt{(S_y^2 + b^2 S_x^2)\left(1/m + \Omega^2 (X - \overline{X})^2\right) / \Omega^2(X)},$$

где $t_k(P)$ - коэффициент Стьюдента с числом степеней свободы, определяемым согласно п. 7.7.

7.10. Если значения X_i расположены приближенно равномерно по диапазону, то рекомендуется использовать оценку Хаузнера-Бреннана с весами $\omega_i = m + 1 - 2 \cdot i$, $i = 1, ..., m$.

7.11. Если имеется разбиение точек на 2 или 3 группы равного объема, то рекомендуется использовать оценки Вальда или Бартлетта, вычисляемые согласно п. 6.2.1, где x^I и y^I - суммы результатов измерений для первой группы, x^{II} и y^{II} - для второй или третьей группы. При вычислении оценки Бартлетта вторую группу (в случае разбиения на 3 группы) не учитывают, а используют для анализа точности приближения.

8. ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ПРИВОДИМЫХ К ЛИНЕЙНЫМ

8.1. Если ГХ имеет вид $V(Y) = a + b \cdot U(X)$, то она приводится к линейной ГХ $Y_i' = a + b \cdot X'$ путем преобразования переменных: $X' = U(X)$, $Y' = V(Y)$. Тогда построение линейной ГХ выполняется по преобразованному набору данных $x'_i = U(x_i)$, $y'_i = V(y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, согласно общим правилам построения линейных ГХ, изложенным в разд. 5-7.

8.2. При выборе весов результатов измерений и оценивании погрешностей следует учитывать следует учитывать изменение характеристик погрешностей измерений при преобразовании переменных.

8.2.1. Если для исходных результатов измерений y_i получены веса ω_i, то преобразованным результатам y'_i соответствуют веса

$$\omega'_i = \omega_i / |V'(y_i)|^2$$

8.2.2. Если для исходных результатов измерений y_i получены характеристики погрешностей: границы Δ_i, θ_i и СКО S_i, то преобразованным результатам соответствуют характеристики:

$$\Delta'_i = c_i \Delta_i, \quad \theta'_i = c_i \theta_i, \quad S'_i = c_i S_i,$$

где $c_i = |V'(y_i)|$.

8.3. Если построена линейная ГХ $Y' = a + b \cdot X'$, то при возвращении к исходным переменным X и Y получается ГХ вида

$$V(Y) = a + b \cdot U(X) \quad \text{или} \quad Y = V^{-1}(a + b \cdot U(X)) = f(X),$$

где V^{-1} - функция, обратная преобразованию V.

8.3.1. Если для линейной ГХ в точке X' получены характеристики погрешности: граница погрешности $\Delta'(X)$, границы составляющих $\varepsilon'(X')$ и $\theta'(X')$, то ГХ в исходных переменных $Y = f(X)$ в точке X соответствуют характеристики погрешности:

$$\Delta(X) = \Delta'(X')/c, \quad \varepsilon(X) = \varepsilon'(X')/c, \quad \theta(X) = \theta'(X)/c,$$

где $c = |V'(Y)|$, $Y = f(X)$, $X' = U(X)$.

8.4. Наиболее распространенные на практике зависимости, приводимые к линейным, а также практические способы выбора соответствующих линеаризующих преобразований представлены в приложении 1.

9. ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВИДА

9.1. Если ГХ является линейной комбинацией известных функций:

$$Y = \sum_{1}^{m} a_j \cdot g_j(X),$$

где g_j - известные функции, a_j - неизвестные коэффициенты, и если входные величины X_i - точно известны, а распределения случайных погрешностей измерений y_i гауссовские, то для построения ГХ рекомендуется использовать МНК. При неравноточных измерениях веса результатов Y определяются согласно правилам, изложенным в разд. 6.

9.2. МНК-оценки коэффициентов ГХ a_j определяются путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} b_{qj} \cdot a_j = h_q, \quad q = 1, \ldots, k,$$

где $b_{qj} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i g_j(X_i) g_q(X_i)$, $h_q^{'} = \sum_{1}^{m} \omega_i y_i g_q(X_i)$.

В матричном виде МНК-оценки могут быть представлены как

$$A = B^{-1} G,$$

где $B = \|b_{qj}\|$ - матрица коэффициентов системы, $A = \|a_j\|$ - вектор оценок, $G = \|g_q\|$ - вектор правых частей системы.

9.3. Корреляционная матрица вектора оценок A оценивается по формуле

$$D(A) = S^2 B^{-1},$$

где S - оценка дисперсии погрешностей измерений y_i, вычисляемая по формуле

$$S^2 = \sum \omega_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot g_j(X_i) \right)^2 \Big/ (m - k - 1).$$

9.4. Если ГХ является алгебраическим полиномом степени k, то рекомендуется перейти к разложению по ортогональным полиномам Чебышева

$$Y = \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot P_j(X),$$

где P_0, ..., P_k - полиномы степеней 0, ..., k, ортогональные относительно X_i:

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot P_q(X_i) \cdot P_j(X_i) = 0 \quad \text{при } q \neq j$$

9.4.1. Ортогональные полиномы младших степеней имеют вид:

$$P_0(X) = 1; \quad P_1(X) = X - \overline{X}; \quad P_2(X) = (X - \overline{X})^2 - (X - \overline{X}) \cdot H_3/H_2 - H_2/H_0,$$

а далее определяются рекуррентно по формуле

$$P_{j+1}(X) = (X + r_j) \cdot P_j(X) - H_j \cdot P_{j-1}(X)/H_{j-1},$$

где $\overline{X} = \sum_{i}^{m} \omega_i \cdot X_i \Big/ \sum_{i}^{m} \omega_i$; $H_j = \sum_{i}^{m} \omega_i \cdot P_j^2(X_i)$; $r_j = -\sum_{i}^{m} \omega_i \cdot X_i \cdot P_j^2(X_i)/H_j$.

9.5. Коэффициенты b_j в разложении по ортогональным полиномам Чебышева вычисляют по формуле

$$b_j = \sum_{i}^{m} \omega_i \cdot Y_i \cdot P_j(X_i)/H_j.$$

9.5.1. Если случайные погрешности измерений y_i имеют приближенно гауссовские распределения, то доверительные границы случайной погрешности ГХ в точке X вычисляют по формуле

$$\varepsilon(X) = t_{m-k-1}(P) \cdot c_k(X) \cdot S,$$

где $t_{m-k-1}(P)$ - коэффициент Стьюдента с $m - k - 1$ степенями свободы;

$$c_k(X) = \sqrt{(1/H_0) + \sum_{1}^{k} P_j^2(X)/H_j},$$

а оценку СКО S вычисляют по формуле

$$S=\sqrt{\sum_{1}^{m}\omega_i\cdot\left(y_i-\sum_{1}^{k}b_j\cdot P_j(X_i)\right)^2\Big/(m-k-1)}.$$

9.5.2. Если известно, что систематические погрешности измерений y_i изменяются нерегулярно в заданных границах $\pm\,\theta$, то границы систематической погрешности ГХ в точке X оценивают по формуле

$$\theta(X)=z_p\cdot c_k(X)\cdot\theta/\sqrt{3}.$$

В этом случае приближенную границу суммарной погрешности ГХ оценивают по формуле

$$\Delta(X)=z_p\cdot c_k(X)\sqrt{S^2+\theta^2/3}.$$

9.6. При равноточных измерениях в случае планируемого эксперимента рекомендуется выбирать значения X_i симметрично относительно их среднего $\overline{X}$ и перейти к переменной $u=X-\overline{X}$:

$$Y(u)=\sum_{0}^{k}b_j\cdot P_j(u).$$

9.6.1. Ортогональные полиномы младших степеней имеют вид:

$$P_1(u);\quad P_2(u)=u-\sum_{1}^{m}u_i^2/m,$$

а далее вычисляются по рекуррентной формуле

$$P_{j+1}(u)=u\cdot P_j(u)-H_j\cdot P_{j-1}(u)/H_{j-1},$$

где $u_i=X_i-\overline{X},\quad H_j=\sum\limits_{1}^{m}P_j^2(u_i)$.

9.6.2. Коэффициенты b_j вычисляют по формуле

$$b_j=\sum_{1}^{m}y_i\cdot P_j(u_i)/H_j.$$

9.7. При равноотстоящих значениях X_i, когда $X_{i+1}=X_i+h$, рекомендуется перейти к нормированной переменной $z=(X-\overline{X})/h$. Тогда ортогональные полиномы младших степеней определяются по формулам:

$$P_1(z) = z; \quad P_2(z) = z^2 - (m^2 - 1)/12; \quad P_3(z) = z^3 - (3m^2 - 7)/20;$$

а последующие определяются по рекуррентной формуле

$$P_{j+1}(z) = z \cdot P_j(z) - P_{j-1}(z) \cdot j^2 \cdot (m^2 - j^2)/4 \cdot (4j^2 - 1).$$

9.7.1. Коэффициенты b_j' в разложении по полиномам $P_j(z)$ оценивают по формуле

$$b_j' = \sum_{1}^{m} Y \cdot P_j(z_i)/H_j$$

9.8. Правильность выбора степени полинома проверяют согласно изложенному в приложениях 2, 3.

10. ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

10.1. Построенная по экспериментальным данным ГХ $Y = f(X)$ на практике используется для оценивания значений входной величины по результатам измерений выходных величин

$$x_i = f^{-1}(y_i).$$

При этом обратная ГХ может быть представлена в аналитическом, графическом или табличном виде.

10.2. Погрешность полученного значения входной величины X определяется как погрешностью измерения выходной величины, так и погрешностью построения ГХ.

10.2.1. Границы погрешности X оценивают по формуле

$$\Delta_x(X) = \left(\Delta_y + \Delta(X)\right)/\left|f'(X)\right|,$$

где $f'(X)$ - производная функции $f(X)$ в точке X.

10.2.2. СКО погрешности X оценивают по формуле

$$S_x(X) = \sqrt{S_y^2 + S^2(X)}/\left|f'(X)\right|.$$

10.2.3. Границы систематической погрешности вычисляют по формуле

$$\theta(X) = \left(\theta_y + \theta(X)\right)/\left|f'(X)\right|$$

10.3. При использовании линейной ГХ $Y = a_0 + b\cdot(X - \overline{X})$ значения входной величины находят по формуле

$$\hat{X} = \overline{X} + (y - a_0)/b\,.$$

10.3.1. Границы погрешности $\hat{X}$ оценивают по формуле

$$\Delta_x(X) = \left(\Delta_y + \Delta(a_0)\right)/|b| + \Delta(b)\cdot\left|\hat{X} - \overline{X}\right|/|b|,$$

где границы погрешностей коэффициентов, $\Delta(a_0)$ и $\Delta(b)$, вычисляют в соответствии с разд. 5.

Примечание. Границы могут быть детерминированные или доверительные; в последнем случае обычно принимают доверительную вероятность $P = 0{,}95$ или $0{,}99$, согласно п. 1.6.

10.3.2. Если линейная ГХ построена МНК по результатам равноточных многократных наблюдений y_{ij}, $j = 1, ..., n$, $i = 1, ..., m$, причем систематические погрешности y_{ij} имеют гауссовские распределения и дисперсии D_y, и если при использовании ГХ результат измерения Y имеет случайную погрешность с дисперсией $c\cdot D_y$, $(0 < c < 1)$, то доверительные границы для истинного значения входной величины X имеют вид

$$\left(X_p - \Delta_p(X),\quad X_p + \Delta_p(X)\right),$$

где $X_p = \overline{X} + (Y - a_0)/b_p$, $\qquad b_p = b - t^2_{N-2}(P)\cdot S^2 \Big/ b\cdot\sum\limits_1^m n_i\cdot(X_i - \overline{X})^2\,.$

$$\Delta_p(X) = \frac{t_{N-2}(P)\cdot S}{b_p}\cdot\sqrt{\left(c + \frac{1}{N}\right)\cdot\frac{b_p}{b} + (\hat{X} - \overline{X})^2 \Big/ \sum_1^m n_i\cdot(X_i - \overline{X})^2}\,.$$

Примечание. Доверительные границы для X не симметричны относительно оценки $\hat{X}$ (т.е. середина интервала X_p не совпадает с $\hat{X}$).

10.3.3. При выполнении условий п. 10.3.2 совместные доверительные интервалы для истинных значений $X_1, X_2, ..., X_q$ вычисляют по формулам, аналогичным п. 10.3.2 с заменой коэффициента $t_{N-2}(P)$ на $f_p(q, N-2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Рекомендуемое

ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ ПОСТРОЕННОЙ ГРАДУИРОВОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

1. Проверяется гипотеза, что ГХ выбранного функционального вида $Y = f(X)$, построенная по результатам измерений в точках (x_i, y_i), $i = 1, ..., m$, удовлетворительно согласуется с этими данными. Принимают уровень значимости $\xi = 0,05$.

1.1. Для проверки согласия вычисляют остатки, т.е. отклонения результатов измерений от расчетных значений: $u_i = y_i - f(x_i)$.

1.2. Проверяют гипотезу случайности остатков $u_1, ..., u_m$ с использованием критерия знаков или серий.

2. В критерии знаков подсчитывают число u_+ положительных остатков u_i и проверяют условие

$$r_m < u_+ < m - r_m,$$

где критическое значение $r_m = r(m, 0,05)$ находят при $m < 50$ по табл. 1, а при $m > 50$ вычисляют по формуле

$$r_m = (m-1)/2 - 0,98\sqrt{m+1}\ .$$

Если число u_+ удовлетворяет этому условию, то гипотеза о согласии построенной ГХ с экспериментальными данными принимается.

Таблица 1

Критические значения r(m) для критерия знаков (при уровне значимости $\xi = 0,05$)

m	6-8	9-11	12-14	15-16	17-19	20-22	23-24	25	28	30
r(m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

m	33	35	37	40	42	44	47	49
r(m)	10	11	12	13	14	15	16	17

3 В критерии серий используется статистика R, равная общему числу серий в последовательности остатков $u_1, ..., u_m$ (серией называется часть последовательности, содержащая члены одного знака). Гипотеза о согласии ГХ с данными принимается, если выполнено условие

$$R_m^- < R < R_m^+.$$

3.1. Критические значения $R_m^{\pm}$ (при m < 40) находят по табл. 2; при этом предполагается, что $u_+ = m/2$, m = 10, ..., 40.

Таблица 2

Критические значения R(m) для критерия серий (при уровне значимости $\xi = 0{,}05$)

m/2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20
R_m^-	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	14
R_m^+	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22	25	27

3.2. Для m > 40 критические значения находят по формуле

$$R_m^{\pm} = \frac{1}{m} \cdot \left\{ 2u_+ \cdot (m - u_+) \pm 1{,}96 \sqrt{2u_+ \frac{m - u_+}{m - 1} \left(2u_+ \cdot (m - u_+) - m \right)} \right\}.$$

Примечание. Для повышения надежности можно совместно использовать критерии знаков и серий. При этом уровень значимости становится выше $\xi < 0{,}1$.

4. Если при точно заданных (или контролируемых) входных величинах x_i выполняют многократные измерения выходных величин y_{ij}, i = 1, ..., m, и погрешности y_{ij} имеют приближенно гауссовские распределения, то для проверки согласия ГХ с экспериментальными данными (x_i, y_{ij}) используют дисперсионное отношение

$$V^2 = S^2/S_*^2,$$

где S - оценка дисперсии погрешностей по остаткам u_i; S_* - оценка дисперсии по рассеянию данных y_{ij} внутри групп.

4.1. Если измерения равноточные, то дисперсионное отношение имеет вид

$$V^2 = \frac{\sum_{1}^{m} n_i \cdot \left(\bar{y}_i - f(x_i)\right)^2 \Big/ (m-k)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \Big/ (N-m)},$$

где k - число оцениваемых параметров, $N = \sum_{1}^{m} n_i$.

4.2. При неравноточных измерениях, когда известна зависимость дисперсии от X: $Dy_{ij} = S^2 \cdot h(x_i)$, дисперсионное отношение имеет вид

$$V^2 = \frac{\sum_{1}^{m} n_i \cdot \left(\bar{y}_i - f(x_i)\right)^2 / h(x_i)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / h(x_i)} \cdot \frac{(N-m)}{(m-k)}.$$

Вычисленное значение V^2 сравнивают с квантилем F_ξ распределения Фишера с m - k и N - m степенями свободы. Если $V^2 < F_\xi$, то построенную ГХ можно считать согласующейся с экспериментальными данными.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Рекомендуемое

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПРИВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК К ЛИНЕЙНЫМ

1. Рассматриваются нелинейные ГХ, которые приводятся к линейной функции путем замены переменных:

$$Y' = a + b \cdot X', \quad X' = U(X), \quad Y' = V(Y) .$$

Наиболее распространенные на практике - степенные, показательные и дробно-линейные ГХ - перечислены в таблице, где приведены соответствующие преобразования переменных.

2. Для выбора между степенными и показательными функциями рекомендуется использовать графические правила.

2.1. По экспериментальным данным (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$, определяют точке: $A_i = (\ln x_i, \ln y_i)$, $B_i = (x_i, \ln y_i)$. Наносят точки на график и определяют, какие точки лучше аппроксимируются прямой линией.

Если точки A_i лежат вдоль прямой линии - принимают степенную ГХ; если точки B_i лежат вдоль прямой - принимают показательную ГХ. Коэффициент b приближенной прямой можно принять за начальное приближение параметра β показательной или степенной ГХ.

2.2. В случае планируемых измерений выбирают две последовательности точек: арифметическую прогрессию $X_{i+1} = X_i + h$; геометрическую прогрессию $X'_{i+1} = \xi \cdot X'_i$, $\xi > 1$. Измеряют соответствующие выходные величины: Y_i - в точке X_i, Y'_i - в точке X'_i, $i = 1, \dots, m$. Вычисляют отношения последовательных результатов:

$$r_i = y_{i+1}/y_i, \quad r'_i = y'_{i+1}/y'_i, \quad i = 1, \dots, (m-1).$$

Если приближенно постоянны отношения r_i, то выбирают показательную функцию (см. строку 1.1 таблицы) и оценивают ее параметр:

$$\beta = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\sum_i r_i \Big/ (m-1)\right);$$

если приближенно постоянны отношения r'_i, то принимают степенную функцию (см. 4-ю строку таблицы) и оценивают показатель:

$$\beta = \frac{1}{m-1} \cdot \left(\sum_i \ln r'_i \Big/ \ln q\right).$$

Правила выбора и линеаризации степенных и показательных функций

N	Функции	Формула	Замена переменных	Правило выбора функции
1.1	Показательная I	$Y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$\tilde{Y} = \ln Y$	$\lvert\tilde{y}_a - y_g\rvert$
1.2	Показательная II	$Y = \alpha \cdot e^{\beta / x}$	$\begin{cases} \tilde{X} = 1/X, \\ \tilde{Y} = \ln Y \end{cases}$	$\lvert\tilde{y}_h - y_g\rvert$
2.1	Дробно-линейная I	$Y = (\alpha + \beta \cdot X)^{-1}$	$\tilde{Y} = 1/Y$	$\lvert\tilde{y}_a - y_h\rvert$
2.2	Гиперболическая	$Y = \alpha + \beta / X$	$\tilde{X} = 1/X$	$\lvert\tilde{y}_h - y_a\rvert$
2.3	Дробно-линейная II	$Y = X/(\alpha + \beta \cdot X)$	$\begin{cases} \tilde{X} = 1/X, \\ \tilde{Y} = 1/Y \end{cases}$	$\lvert\tilde{y}_h - y_h\rvert$
3.1	Логарифмическая I	$Y = \alpha + \beta \cdot \ln X$	$\tilde{X} = \ln X$	$\lvert\tilde{y}_g - y_a\rvert$
3.2	Логарифмическая II	$Y = \alpha + \beta / \ln X$	$\tilde{X} = 1/\ln X$	$\lvert\tilde{y}_g - y_h\rvert$
4	Степенная	$Y = \alpha \cdot X^{\beta}$	$\begin{cases} \tilde{X} = \ln X, \\ \tilde{Y} = \ln Y \end{cases}$	$\lvert\tilde{y}_g - y_g\rvert$
5	Линейная	$Y = \alpha + \beta \cdot X$	—	$\lvert\tilde{y}_a - y_a\rvert$

3. Если данные можно графически аппроксимировать гладкой кривой, то используют метод выбора ГХ, основанный на двух "опорных" точках.

3.1. Опорные точки X и X' выбирают расположенными ближе к краям диапазона (как средние значения или медианы нескольких крайних точек).

3.2. Для пары точек X и X' находят три средних значения: арифметическое - $X_a = (X + X')/2$, геометрическое - $X_g = \sqrt{X \cdot X'}$ и гармоническое - $X_h = 2 \cdot X \cdot X'/(X + X')$. Аналогичные средние значения Y_a, Y_g и Y_h находят для точек Y и Y'.

По сглаженной кривой находят также точки Y'_a, Y'_g и Y'_h, соответствующие точкам X_a, X_g и X_h. Критерий выбора подходящей аппроксимации основан на сравнении этих значений с полученными ранее Y_a, Y_g и Y_h. Вычисляют попарные разности средних и определяют наименьшую из этих разностей. В зависимости от того, какая разность оказалась наименьшей, выбирают вид аппроксимирующей функции. В помещенной ранее таблице для каждой функции приведен вид наименьшей разности, т.е. правило выбора данной функции из приведенного набора. Для сопоставления приведено также правило выбора линейной функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Рекомендуемое

ВЫБОР СТЕПЕНИ ПОЛИНОМА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ГРАДУИРОВОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. При выборе степени полинома, аппроксимирующего ГХ, целесообразно использовать разложение по ортогональным полиномам Чебышева $P_j(X)$. Относительно экспериментальных данных предполагается:

значения X_i известны точно;

значения y_i содержат погрешности с приближенно гауссовским распределением и дисперсиями $S_i^2 = S^2/\omega_i$.

2. По данным (X_i, y_i) последовательно строят приближения полиномами со степенями $k = 1, \ldots, K$, используя МНК (разд. 10):

$$f_k(X) = \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot P_j(X),$$

где $$b_j = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot y_i \cdot P_j(X_i) \Big/ \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot P_j^2(X_i).$$

Примечание. Максимальную степень полинома K выбирают, исходя из конкретной задачи; в большинстве случаев рекомендуется K = 5.

3. Вычисляют остаточные суммы квадратов

$$Q_k = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot y_i^2 - \sum_{j=0}^{k} b_j^2 \cdot H_j$$

и оценки дисперсии S_k^2, соответствующие различным степеням k:

$$S_k^2 = Q_k/(m-k-1).$$

4. Степень полинома повышают до тех пор, пока оценки S_k^2 заметно убывают. Выбор степени полинома k осуществляют в соотвентствии с требованиями к точности построения ГХ в конкретной методике; в частности, можно рекомендовать одно из следующих правил:

1) принимают значение k, при котором оценка S_k^2 минимальна, т.е $S_k^2 < S_{k-1}^2$, $S_k^2 < S_{k+1}^2$;

2) принимают значение k, после которого оценка S_k^2 перестает заметно убывать, т.е. $S_{k+1}^2 > 0{,}8 \cdot S_k^2$.

Если при всех степенях k < K выбранное условие не достигнуто, то принимают максимальную степень полинома K.

5. Для выбора степени полинома можно использовать также методы перекрестного выбора. При этом все данные разбивают на (k + 2) группы (конкретные способы разбиения могут быть различны и устанавливаются в методиках). Одна из групп является проверочной, а по медианным точкам остальных групп строится полином $f_k(X)$ степени k.

Согласие полинома с исходными данными оценивается по его отклонению от медианы проверочной выборки:

$$d(k,n) = \left| f(x^{n}_{med}) - y^{n}_{med} \right|.$$

Описанную процедуру повторяют многократно, принимая последовательно каждую из групп за проверочную. В результате получают муммарный показатель адекватности полинома $f_k(X)$ исходным данным:

$$d(k) = \sum_{n=1}^{k+2} d(k,n).$$

В качестве искомой степени полинома принимают то значение k, для кторого показатель d(k) минимален.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Рекомендуемое

ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГРАДУИРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. При построении ГХ в виде функции принятого вида

$$Y = F(X,\ a_1, \ldots, a_k)$$

погрешности полученной ГХ оценивают на основе линеаризованного разложения

$$\delta F(X) = \sum_{1}^{k} \left(u_i(X) \cdot \delta(x_i) + v_i \cdot \delta(y_i) \right),$$

где коэффициенты

$$u_i(X) = \sum_{1}^{k} (dF/da_j) \cdot (da_j/dx_i), \qquad v_i(X) = \sum_{1}^{k} (dF/da_j) \cdot (da_j/dy_i),$$

a_j - оценки параметров ГХ по данным (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$; все производные вычисляются в точке $(X,\ a_1, \ldots, a_k)$.

2. Если заданы Δ_x и Δ_y - границы погрешностей измерений величин x_i, y_i, то границы погрешностей ГХ в точке X оценивают по формуле

$$\Delta(X) = \Delta_x \sum_1^m |u_i(X)| + \Delta_y \sum_1^m |v_i(X)|.$$

3. Если заданы характеристики случайных и систематических составляющих погрешностей измерений величин x_i, y_i, то характеристики погрешности ГХ в точке X оценивают по формулам:

$$\theta(X) = \theta_x \sum_1^m |u_i(X)| + \theta_y \sum_1^m |v_i(X)|,$$

$$S(X) = \sqrt{S_x^2 \sum_1^m u_i^2(X) + S_y^2 \sum_1^m v_i^2(X)}.$$

3.1. Доверительные границы случайной погрешности ГХ в точке X оценивают по формуле

$$\varepsilon(X) = t_k(P) \cdot S(X),$$

где $t_k(P)$ - коэффициент Стьюдента при вероятности P с числом степеней свободы $k = \min\{n_x - 1, n_y - 1\}$, n_x и n_y - объемы выборок, по которым получены оценки S_x и S_y.

4. Если известно, что погрешности исходных данных изменяются нерегулярным образом в заданных границах $\pm\Delta_x$, $\pm\Delta_y$, то можно построить приближенные доверительные границы погрешности ГХ в точке X

$$\Delta(X) = z_p \cdot S_0(X),$$

где $z_p = \begin{cases} 1{,}96 & \text{при } P = 0{,}95, \\ 2{,}58 & \text{при } P = 0{,}99, \end{cases}$ $\quad S_0 = \sqrt{\Delta_x^2 \sum_1^m u_i^2(X)/3 + \Delta_y^2 \sum_1^m v_i^2(X)/3}.$

5. Если систематические погрешности исходных данных изменяются нерегулярным образом в заданных границах $\pm\theta_x$, $\pm\theta_y$, то приближенные границы систематической погрешности ГХ в точке X вычисляют по формуле

$$\theta(X) = z_p \cdot S_0(X),$$

где $\quad S_0 = \sqrt{\theta_x^2 \sum_1^m u_i^2(X)/3 + \theta_y^2 \sum_1^m v_i^2(X)/3}.$

6. Если систематические погрешности исходных данных остаются примерно постоянными для всех точек диапазона, то границы систематической погрешности ГХ в точке X оценивают по формуле

$$\theta(X) = \theta_x \left|\sum_1^m u_i(X)\right| + \theta_y \left|\sum_1^m v_i(X)\right|.$$

7. Частные случаи приведенных выше общих формул применительно к конкретным функциональным видам ГХ (линейным, полиномиальным и приводимым к линейным) приведены в разд. 5 - 9.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Рекомендуемое

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ГРАДУИРОВОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассматривается градуировка вольтметра переменного напряжения. На входе устанавливается переменное напряжение X_i (с погрешностью не более 0,002 %): $X_i = i \cdot 0{,}2$ В, $i = 1, ..., 5$; постоянное напряжение на выходе Y_i измеряется с погрешностью не более 0,002 %. Измерения выполнены с многократными наблюдениями; полученные результаты $\bar{y}_i$, а также число наблюдений n_i и оценка дисперсии погрешности S_i^2 в каждой точке приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	X_i, В	n_i	$\bar{y}_i$, В	$S_i^2 \cdot 10^{10}$, В^2
1	0.2	25	0,199946	8,55
2	0.4	25	0,400023	4.46
3	0.6	25	0,600071	4.41
4	0.8	25	0,800062	2.82
5	1.0	50	1,000024	2,72

На приведенных простейших экспериментальных данных иллюстрируется решение основных задач, возникающих при построении ГХ.

1. Построение линейной ГХ общего вида

$$Y = a + b \cdot X = a_0 + b \cdot (X - \bar{X}).$$

Поскольку входная величина X в данном случае является контролируемой переменной (на входе устанавливались заранее заданные значения X_i), то для построения ГХ можно использовать метод наименьших квадратов. Вычисление оценок a_0 и b приведено в табл. 2 (округление результатов промежуточных вычислений, выполненных с помощью микрокалькулятора, проводилось поэтапно с удержанием лишних значащих цифр). Веса приняты равными $\omega_i = n_i / S_i^2$.

Таблица 2

Вычисление оценок наименьших квадратов для линейной функции

i	ω_i	$\omega_i \cdot X_i$	$\omega_i \cdot \bar{y}_i$	$\omega_i \cdot (X_i - \bar{X})^2$	$\omega_i \cdot \bar{y}_i \cdot (X_i - \bar{X})$
1	2,924	0,584795	0,584637	0,931421	-0,329968
2	5,605	2,242152	2,242281	0,744319	-0,817084
3	5,800	3,480273	3,480690	0,156769	-0,572221
4	8,865	7,091198	7,092748	0,011239	0,252508
5	18,382	18,382352	18,382793	1,020369	4,331004
Σ	41,577	31,781775	31,783149	2,864109	2,864239
Средние		0,76440	0,76443		

Получены оценки коэффициентов

$$b = \sum_{i}^{m} \omega_i \cdot \bar{y}_i \cdot (X_i - \bar{X}) \Big/ \sum_{i}^{m} \omega_i \cdot (X_i - \bar{X})^2 = 2,86424/2,86411 = 1,00004;$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{X} = 0,76443 - 1,00004 \cdot 0,76440 = 0.$$

В итоге получена ГХ вида $Y = b \cdot X$, где $b = 1{,}00004$.

2. Если заранее известно: что ГХ имеет вид $Y = b_0 \cdot X$, то коэффициент b_0 оценивается по формуле

$$b_0 = \sum_1^m \omega_i \cdot \bar{y}_i \cdot X_i \Big/ \sum_1^m \omega_i \cdot X_i^2 = 1{,}00004.$$

Получено то же значение коэффициента, что и выше.

3. Оценим погрешности полученных коэффициентов и расчетных значений ГХ. Из предварительных исследований известно, что в погрешностях исходных данных преобладают случайные составляющие, которые имеют гауссовские распределения. Тогда доверительные границы погрешностей коэффициентов и расчетных значений ГХ вычисляют по формулам:

$$\varepsilon(a_0) = t_{m-2}(P) \cdot S \Big/ \sqrt{\sum \omega_i}\ ; \quad \varepsilon(b) = t_{m-2}(P) \cdot S \Big/ \sqrt{\sum \omega_i \cdot (X_i - \bar{X})^2}\ ;$$

$$\varepsilon(X) = \sqrt{\varepsilon^2(a_0) + (X - \bar{X})^2 \cdot \varepsilon^2(b)}.$$

Оценка СКО вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\sum_1^m \omega_i \cdot (\bar{y}_i - \bar{Y}_i)^2 \Big/ (m-2)}.$$

Вычисление необходимых сумм квадратов приведено в табл. 3.

При доверительной вероятности $P = 0{,}95$ и $m = 5$ коэффициент Стьюдента $t_3(0{,}95) = 3{,}18$. В итоге получено

$\varepsilon(b) = 21 \cdot 10^{-5}$; $\varepsilon(a_0) = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ В; $\varepsilon(X) = \sqrt{30 + 440 \cdot (X - \bar{X})^2} \cdot 10^{-5}$ В.

Таблица 3

Отклонения экспериментальных данных от расчетных значений

i	$\hat{Y}_i$	$z_i \cdot 10^5$	$\omega_i \cdot z_i^2 \cdot 10^{10}$	y_{i0}	$u_i \cdot 10^5$	$\omega_i \cdot u_i^2 \cdot 10^{10}$
1	0,200008	-6,2	112	0,2	-5,4	85
2	0,400017	0,6	2	0,4	2,3	29
3	0,600026	4,5	117	0,6	7,1	292
4	0,800035	2,7	64	0,8	6,2	340
5	1,000044	-2,0	73	1,0	2,4	106
Σ			368			852

4. В данном случае номинальной (желательной) ГХ является

$$Y = b_0 \cdot X, \quad b_0 = 1.$$

Необходимо проверить, что построенная ГХ незначимо отклоняется от номинальной ГХ.

Поскольку построенная ГХ также имеет вид $Y = b \cdot X$, то необходимо лишь проверить, что коэффициенты b_0 и b различаются незначимо. Для этого проверяют условие

$$|b - b_0| < \varepsilon(b).$$

Поскольку в данном случае

$$|b - b_0| = 4 \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon(b) = 21 \cdot 10^{-5},$$

то гипотеза о согласии построенной и номинальной ГХ принимается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6
Справочное

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

По разд. 1-2:

1. Кончаловский В.Ю., Купершмидт Я.А., Сыропятова Р.Я., Харченко Р.Р. Электрические измерительные преобразователи. - М.: Энергия, 1967.
2. Левшина Е.С., Новицкий П.В. Электрические измерения физических величин: Измерительные преобразователи. - Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1983.
3. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. - М.: Финансы и статистика, 1985.
4. Долинский Е.Ф. Обработка данных измерений. - М.: Изд. стандартов, 1973.
5. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. - М.: Физматгиз, 1962.
6. Семенов Л.А., Сирая Т.Н. Методы построения градуировочных характеристик средств измерений. - М.: Изд. стандартов, 1986.

По разд. 3-4:

7. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. - М.: Наука, 1971.
8. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. - М.: Мир, 1973.
9. Худсон Д. Статистика для физиков. - М.: Мир, 1973.
10. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. - М.: Финансы и статистика, 1987.
11. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980.

По разд. 5: [3, 6-11].

По разд. 6: [6, 10].

12. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. - М.: Финансы и статистика, 1987.

13. Смоляк С.А., Титаренко Б.П. Устойчивые методы оценивания. - М.: Статистика, 1987.

14. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. - М.: Финансы и статистика, 1981.

По разд. 7: [6, 10, 14].

По разд. 8: [6-8].

По разд. 9: [6-11, 14].

По разд. 10: [3, 6, 14].

Дополнительная литература:

15. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. - М.: Наука, 1987.

СОДЕРЖАНИЕ

Информационные данные 2

Преамбула 3

1. Общие положения 3

2. Порядок построения градуировочной характеристики 5

3. Основные функциональные виды и методы построения градуировочных характеристик 8

4. Основные положения оценивания погрешностей градуировочных характеристик 14

5. Построение линейных градуировочных характеристик при точно известных значениях входных величин и гауссовском распределении погрешностей измерений выходных величин 16

6. Построение линейных градуировочных характеристик при точно известных значениях входных величин и распределениях погрешностей измерений выходных величин, отличных от гауссовских 24

7. Построение линейных градуировочных характеристик при наличии погрешностей измерений входных величин 26

8. Построение нелинейных градуировочных характеристик, приводимых к линейным 32

9. Построение нелинейных градуировочных характеристик полиномиального вида 34

10. Оценивание погрешностей результатов измерений при использовании градуировочных характеристик 37

Приложение 1. Проверка адекватности построения градуировочной характеристики экспериментальным данным 39

Приложение 2. Преобразования переменных для приведения нелинейных градуировочных характеристик 42

Приложение 3. Выбор степени полинома для аппроксимации градуировочной характеристики........ 44

Приложение 4. Оценивание погрешностей градуировочных характеристик........ 46

Приложение 5. Пример построения градуировочной характеристики........ 48

Приложение 6. Список рекомендуемой литературы........ 52