

Методические указания
по применению метода конечных
элементов для решения плановых
задач фильтрации подземных вод
на ЭЦВМ

Белгород 1979

МИНИСТЕРСТВО ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ СССР

С О Д В Р У Д А

Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт по осущению месторождений полезных ископаемых, специальным горным работам, рудничной геологии и маркшейдерскому делу

В И О Г Е И

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**ПО ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ
ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ЭЦЕМ**

**Белгород
1979**

Настоящие методические указания предназначены для численного моделирования на ЭЦВМ методом конечных элементов (МКЭ) нестационарных плановых задач фильтрации. Программы написаны на языке ФОРТРАН-2. Приводится тестовый пример расчета для случая напорно-безнапорного режима. Авторы программ: Васильев В.А., Карачевцев Н.Ф., Ломакин А.В., Бабин В.И., Мозговой И.Ф., Муравьева Т.И.

Работа выполнена Васильевым В.А., Карачевцевым Н.Ф., Топчим Г.Е. под общим руководством канд. физ.-мат. наук, доцента В.А.Васильева и утверждена научно-техническим советом института ВИОГЕМ 7 сентября 1978 г. в качестве методических указаний.

І. ВВЕДЕНИЕ

Разработка обводненных месторождений полезных ископаемых связана с проведением ряда мероприятий по осушению водоносных горизонтов. Этому предшествует решение задач фильтрации подземных вод. Фильтрационные процессы, происходящие в естественных природных условиях, очень сложны и только математические модели позволяют изучать их наиболее полно и достаточно надежно.

В настоящее время бурно развивается вычислительная математика, что неразрывно связано с развитием средств вычислительной техники и в первую очередь быстродействующих ЭЦВМ. Численные методы глубоко проникли во все традиционные методы инженерных расчетов. Более того, как отмечает А.А.Самарский [8] "... в настоящее время появился новый способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание или математическое моделирование — вычислительный эксперимент, т.е. исследование реальных процессов средствами вычислительной математики".

Вычислительный эксперимент проводится на тщательно подготовленной математической модели процесса, реализованной на ЭЦВМ. Разработанный алгоритм и отлаженная программа образуют действующую математическую модель. Например, можно создать действующую модель напорного или безнапорного потока в условиях стационарного или нестационарного режима, модель напорно-безнапорного потока, протекающего в слоистой толще, пространственного потока и т.п. Такие модели легко превращаются в настоящие действующие модели конкретных гидрогеологических объектов, систем осушения и т.д. Можно с уверенностью утверждать, что, по мере развития вычислительных средств, с появлением ЭВМ новых поколений, вычислительное экспериментирование будет успешно развиваться и расширяться.

Гидрогеологу, не специалисту в области вычислительной математики, трудно ориентироваться в тонкостях современной математики. Практика показывает, что лишь те методы, которые отличаются простотой, наглядностью, способностью удобно согласовывать математические параметры с геологическими и гидрогеологическими представлениями, получили наибольшее распространение в фильтрационных расчетах. К таким методам относятся ЭГДА, моделирование на аналоговых ЭВМ и интеграторах. С внедрением в практику фильтрационных расчетов ЭЦВМ получил широкое распространение метод конечных разностей (МКР). Однако в силу специфики реализации этого метода на ЭЦВМ гидрогеологу, привыкшему при аналоговом моделировании оперировать физически ощутимыми величинами и понятиями, такими, как филь-

традиционные сопротивления, емкости, стало труднее следить за процессом моделирования и контролировать результаты, ибо для этого необходимо более глубоко и профессионально вникать в сферу программирования и математические тонкости той вычислительной схемы, которая заложена в программу. В последние годы стремительно развивается метод конечных элементов (МКЭ), который, с одной стороны, принадлежит к разновидности МКР, а, с другой, обладает такими же достоинствами, в смысле простоты, наглядности, гибкости и физической доступности, что ЭГДА и АВМ. Кроме того, этот метод по целому ряду других достоинств обладает более широкими возможностями, чем метод аналогового моделирования.

МКЭ в настоящее время очень популярен [1,2,3,4,5,7]. В монографии "Теория метода конечных элементов" [3] Г.Стренг и Дж.Фикс пишут: "МКЭ удивительно успешно применяется в самых различных задачах. Он был создан для решения сложных уравнений теории упругости и строительной механики и оказался гораздо эффективнее метода конечных разностей", и далее: "... вероятно, конечные элементы стали наиболее употребительным средством вычислительной математики во всем мире". Важной особенностью МКЭ является то, что он очень хорошо реализуется на ЭЦВМ. Как показала практика использования МКЭ в институте ВИОГЕМ [7], постоянно действующие модели стационарных и нестационарных потоков определенной структуры (плановые напорные, безнапорные, напорно-безнапорные) позволяют удобно осуществлять вычислительный эксперимент. Эти модели легко учитывают фильтрационную неоднородность среды, локальные особенности потока и сложную конфигурацию границ, многовариантность смены граничных условий и параметров. Программы, реализующие метод, надежны и просты в эксплуатации.

Цель настоящих методических указаний - изложить основные вопросы методики численного моделирования на ЭЦВМ по методу МКЭ нестационарных плановых задач фильтрации.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Метод конечных элементов применительно к фильтрационным расчетам рассматривается ниже как метод моделирования и осуществления вычислительного эксперимента для плановых нестационарных потоков подземных вод, описываемых обобщенным уравнением Буссинеска [6],

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W = \rho_3 \frac{\partial h}{\partial t} \quad , \quad (1)$$

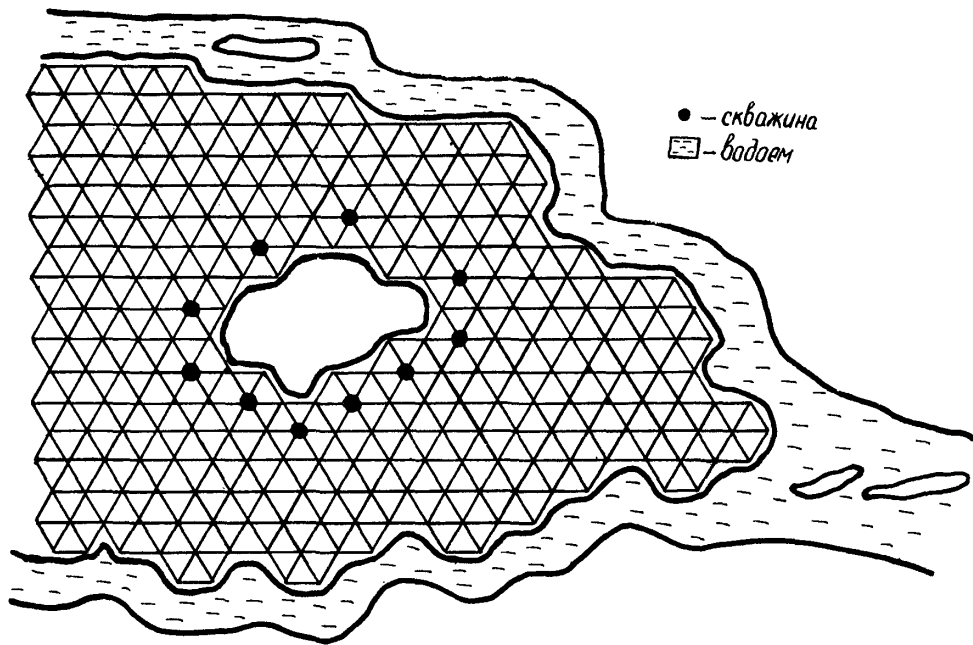


Рис. I. Пример триангуляции области фильтрации.

где $P_1(x, y), P_2(x, y), P_3(x, y)$ - заданные функции; $h(x, y, t)$ - напор (уровень) грунтовых вод; W - интенсивность площадного питания (инфильтрация); t - время.

В зависимости от характера планового потока функции P_1, P_2, P_3 приобретают следующий смысл:

а) напорный поток $P_1 = T_x; P_2 = T_y; P_3 = \mu^*$, где T_x, T_y - фильтрационная проводимость пласта в направлении координатных осей; μ^* - коэффициент упругой водоотдачи;

б) безнапорный поток $P_1 = K_x/(h - h_0); P_2 = K_y/(h - h_0); P_3 = \mu$, где K_x, K_y - коэффициенты фильтрации в направлении осей X и Y ; $h_0(x, y)$ - отметка водоупора; μ - коэффициент гравитационной водоотдачи;

в) напорно-безнапорный поток. Функции P_1, P_2, P_3 принимают значения, соответствующие пп. а) и б) для соответствующих зон.

В общем случае решение уравнения (I) должно удовлетворять условиям:

1) начальное условие $h(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$;

2) условие I рода $h(x, y, t)|_{r_1} = \varphi_1(x, y)$;

3) условие II рода $q(x, y, t)|_{r_2} = \varphi_2(x, y, t)$;

где q - расход потока на участке границы r_2 .

Как и при моделировании на моделях-сетках, идея МКЭ проста: сплошная область фильтрации заменяется дискретной. Дискретизация производится путем разбиения области на непересекающие друг друга подобласти - конечные элементы. Алгоритм и программы, рассматриваемые ниже, используют конечные элементы в виде треугольников произвольной формы. Пример такой триангуляции показан на рис. I. Прономеруем все треугольники области от I до MM , а все вершины их (узлы) - от I до NN .

Выделим какой-нибудь треугольник $\Delta(i, j, k)$ с вершинами $M_i(x_i, y_i), M_j(x_j, y_j), M_k(x_k, y_k)$ (рис. 2). Обозначим напоры $h(x, y, t)$ в узлах через h_i, h_j, h_k и будем считать, что в пределах треугольника параметры P_1, P_2, P_3 , а также производная $\frac{\partial h}{\partial t}$ - постоянны. Энергия, отнесенная к единице массы, запасенная жидкостью на некоторый фиксированный момент времени, для треугольника будет определяться выражением

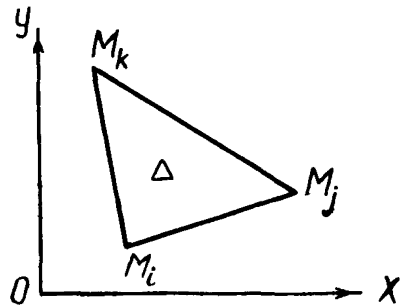


Рис. 2. Треугольный конечный элемент.

$$\mathcal{J}(h) = \iint \left\{ \frac{1}{2} \left[P_1 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + P_2 \left(\frac{dh}{dy} \right)^2 \right] - h \left(W - P_3 \frac{dh}{dt} \right) \right\} dx dy - \int h \frac{1}{2} d\varphi, \quad (2)$$

причем последний интеграл берется по периметру треугольного элемента, так что $\frac{1}{2}$ означает приточность со стороны треугольника - ков, окружающих рассматриваемый.

Как доказывается в вариационном исчислении, задачу интегрирования уравнения (I) можно заменить задачей минимизации функционала (2) [I], распространенного на всю область фильтрации. Решая эту последнюю задачу, поступим следующим образом.

Предположим, что в пределах треугольника функция $h(x, y, t)$ представима линейной функцией координат,

$$h(x, y, t) = N_i(x, y) h_i(t) + N_j(x, y) h_j(t) + N_k(x, y) h_k(t), \quad (3)$$

$$\text{где } N_s = \frac{1}{2} (a_s + b_s x + c_s y); \quad (S = i, j, k). \quad (4)$$

При этом a_s, b_s, c_s, Δ выражаются через координаты вершин треугольника следующим образом [I, 2]:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; & a_j &= x_k y_i - x_i y_k; & a_k &= x_i y_j - x_j y_i; \\ b_i &= y_j - y_k; & b_j &= y_k - y_i; & b_k &= y_i - y_j; \\ c_i &= x_k - x_j; & c_j &= x_i - x_k; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [(x_i - x_j)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)].$$

Теперь интеграл \mathcal{J} по треугольной области будет функцией узловых значений h_i, h_j, h_k

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}^*(h_i, h_j, h_k).$$

Чтобы найти минимум \mathcal{J}^* по переменным h_i, h_j, h_k , полагаем

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial h_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial h_j} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial h_k} = 0.$$

В результате получим основные уравнения метода конечных элементов для треугольника, которые удобно записать в матричной форме*

$$[g] \times \{h\} + [m] \times \frac{\partial}{\partial t} \{h\} = \{\bar{w}\} + \{\bar{q}\}, \quad (5)$$

где элементы матриц определяются выражениями

$$g_{ij} = \iint \left(P_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + P_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy; \quad (6)$$

* Отчет по теме № 32-76. Разработка алгоритмов и программ по реализации метода конечных элементов в задачах осушения и геомеханики для ЭЦМ БЭСМ-4М фонды ВНОГЕМ, Белгород, 1977, 198 с.

$$m_{ij} = \iint P_3 N_i N_j dx dy; \quad (7)$$

$$W_i = \iint w N_i dx dy; \quad (8)$$

$$\bar{q}_i = \int_{\Gamma_i} q N_i d\Gamma. \quad (9)$$

В развернутом виде эти соотношения имеют вид

$$g_{ij} = \frac{1}{4\Delta} (P_1 B_i B_j + P_2 C_i C_j);$$

$$g_{ik} = \frac{1}{4\Delta} (P_1 B_i B_k + P_2 C_i C_k);$$

$$g_{jk} = \frac{1}{4\Delta} (P_1 B_j B_k + P_2 C_j C_k);$$

$$g_{ii} = -(g_{ij} + g_{ik}); \quad g_{jj} = -(g_{ij} + g_{jk}); \quad g_{kk} = -(g_{ik} + g_{jk}); \quad (10)$$

$$m_{ii} = m_{jj} = m_{kk} = P_3 \frac{\Delta}{6};$$

$$m_{ij} = m_{ik} = m_{jk} = P_3 \frac{\Delta}{12},$$

причем, как это легко заметить, матрицы симметричны: $g_{ij} = g_{ji}$ и

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad \bar{w} = w \frac{\Delta}{3}, \quad \bar{q} = q_i.$$

где q_i есть приток в узел i со стороны треугольников, окружающих данный.

Элементы матрицы $[g]$ имеют простой физический смысл. В развернутом виде уравнения (5) имеют вид

$$g_{ij}(h_j - h_i) + g_{ik}(h_k - h_i) + \frac{P_3 \Delta}{12} (2h_i + h_j + h_k) = w \frac{\Delta}{3} + q_i;$$

$$g_{kj}(h_k - h_j) + g_{ij}(h_i - h_j) + \frac{P_3 \Delta}{12} (h_i + 2h_j + h_k) = w \frac{\Delta}{3} + q_j; \quad (11)$$

$$g_{jk}(h_j - h_k) + g_{ik}(h_i - h_k) + \frac{P_3 \Delta}{12} (h_i + h_j + 2h_k) = w \frac{\Delta}{3} + q_k.$$

Структура этих уравнений позволяет трактовать коэффициенты g_{ij} как фильтрационную проводимость некоторых фиктивных лент тока, по которым жидкость якобы перемещается от одного узла к другому. Матрицу $[g]$ называют матрицей фильтрационных проводимостей треугольного элемента. Если вместо проводимостей g_{ij} рассматривать величину $Z_{ij} = \frac{1}{g_{ij}}$, так называемые фильтрационные сопротивления, то можно указать следующую геометрическую схему построения фиктивных лент тока для треугольника $[9]$. Вначале определяется точка пересечения медиатрисс треугольника O_M (медиатриссой стороны треугольника называется прямая, перпендикулярная стороне и проходящая через ее середину). Простые построения, показанные на

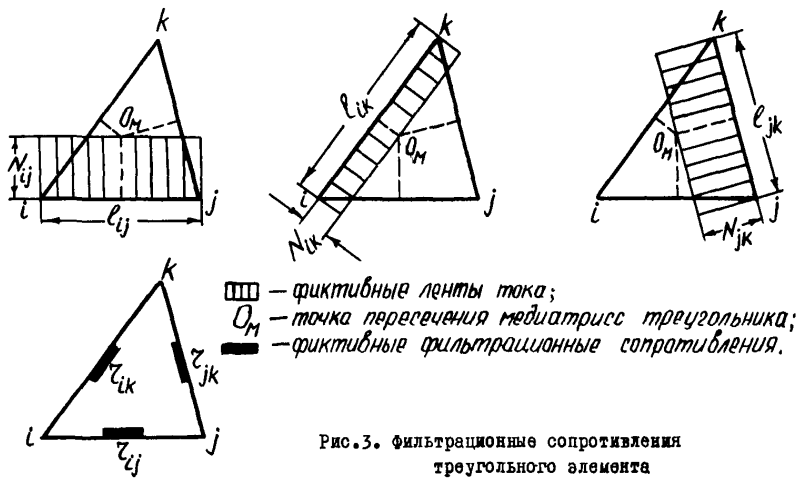


Рис.3. Фильтрационные сопротивления
треугольного элемента

рис.3, позволяют определить длину L_{ij} и N_{ij} -ширину ленты тока для каждой стороны треугольника. Легко показать, что

$$z_{ij} = \frac{L_{ij}}{N_{ij}},$$

причем, численно

$$z_{ij} = \frac{1}{g_{ij}}.$$

Для прямоугольных треугольников (рис.4) точка пересечения медиантрис лежит на гипотенузе, и проводимость вдоль нее оказывается равной нулю. Для таких треугольников формулы, определяющие проводимость g_{ij} , совпадают с хорошо известными формулами подсчета электрических проводимостей при моделировании на аналоговых электрических машинах.

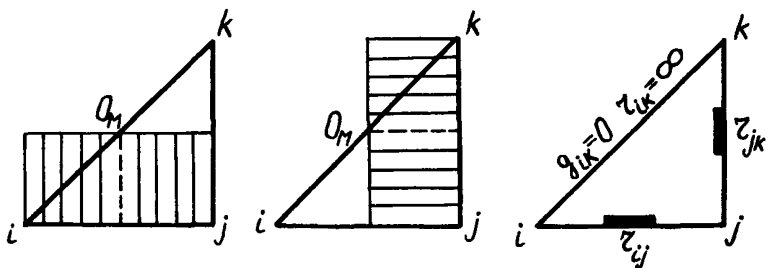


Рис.4. Фильтрационные сопротивления прямоугольного треугольника.

Для выяснения физического смысла матрицы $[m]$ рассмотрим матричное произведение $[m] \times [h]$, где, как и выше, точка над h означает производную по времени. В треугольном элементе проведем медиану (рис.5).

Легко видеть, что

$$[m] \times [h] = \frac{\rho_3 \Delta}{12} \begin{Bmatrix} 2h_i + h_j + h_k \\ h_i + 2h_j + h_k \\ h_i + h_j + 2h_k \end{Bmatrix} = \frac{\rho_3 \Delta}{3} \begin{Bmatrix} h_{icp} \\ h_{jcp} \\ h_{kcp} \end{Bmatrix} = \rho_3 \begin{Bmatrix} V_{icp} \\ V_{jcp} \\ V_{kcp} \end{Bmatrix},$$

и, следовательно, V_{icp} означает средний объем жидкости, отнесенный к соответствующему узлу.

Так как

$$[m] \times [h] \approx \frac{\rho_3 \Delta}{3} \left\{ \frac{\Delta h_{cp}}{\Delta t} \right\} = \rho_3 \left\{ \frac{\Delta V_{cp}}{\Delta t} \right\},$$

то матрицу $[m]$ можно назвать матрицей распределения влагоемкости по площади треугольного элемента или просто - матрицей влагоемкости элемента.

Система (5) представляет собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим теперь расчетный интервал времени $\Delta \tau$

$$\tau \leq t \leq \Delta \tau + \tau.$$

Заменяя производную по времени $\{h\}$ конечно-разностным отношением

$$\{h\} = \frac{1}{\Delta \tau} (\{h\}_{\Delta \tau + \tau} - \{h\}_{\tau}),$$

из уравнения (5) получим следующее рекуррентное соотношение:

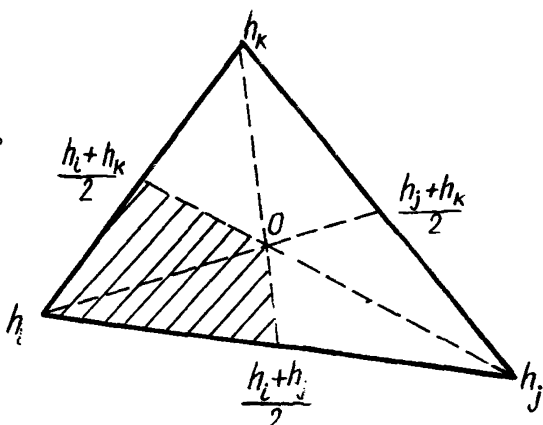
$$([g] + \frac{1}{\Delta \tau} [m]) \times \{h\}_{\Delta \tau + \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} [m] \times \{h\}_{\tau} + \{\bar{w}\} + \{\bar{q}\}, \quad (I2)$$

которое позволяет, по известному значению вектора $\{h\}_{\tau}$ в начальный момент времени, определить значение этого вектора на расчетный момент времени. Такая вычислительная процедура носит название схемы Либмана и широко используется при вычислениях. Исследования показывают, что схема эта устойчива и равномерно сходится.

Произведем в уравнении (I2) необходимые операции сложения и умножения над матрицами тогда получим следующую основную систему МКЭ для треугольного элемента:

$$[P] \times \{h\}_{\Delta \tau + \tau} = \{Vh\}_{\tau} + \{Q\}, \quad (I3)$$

где $[P] = [g] + \frac{1}{\Delta \tau} [m]$; $\{Vh\} = \frac{1}{\Delta \tau} [m] \times \{h\}_{\tau}$; $\{Q\} = \{\bar{w}\} + \{\bar{q}\}$.




 - емкостная окрестность узла

Рис.5. Емкостные характеристики треугольного элемента.

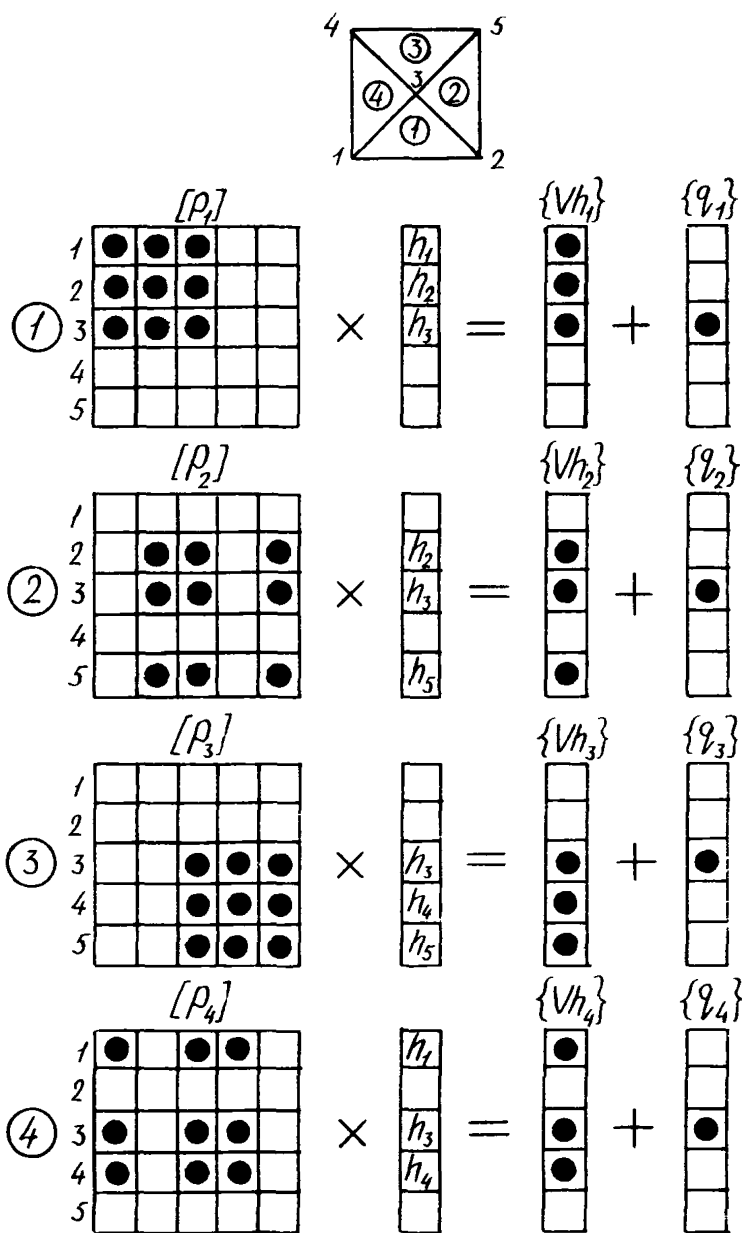


Рис.6. Схема формирования уравнений МКЭ отдельных элементов.

Чтобы составить систему уравнений для всех неизвестных h_i в области фильтрации, нужно теперь объединить уравнения (13) для всех элементов области. Получается система уравнений вида

$$[G] \cdot \{h\}_{\Delta\tau+\tau} = \{VQ\}_{\tau} \quad (14)$$

где матрица системы $[G]$ имеет размеры $NN \times NN$, симметрична и обладает ленточной структурой. Составление матрицы $[G]$ для больших NN является трудоемким процессом и производится специальной программой на ЭЦМ.

Поясним на простом примере, как строится система уравнений (14). На рис.6 показана схема последовательного формирования уравнений (13) для четырех треугольников. Элементы изображены кружками, пустые клетки - нулями.

На рис.7 показана структура уравнений системы. В тех клетках, в которых произошло сложение элементов, кружки заменены прямоугольниками. Вследствие симметрии матрицы $[G]$ и ее полосовой структуры в оперативной памяти ЭВМ хранится только верхняя полуполоса матрицы шириной KW .

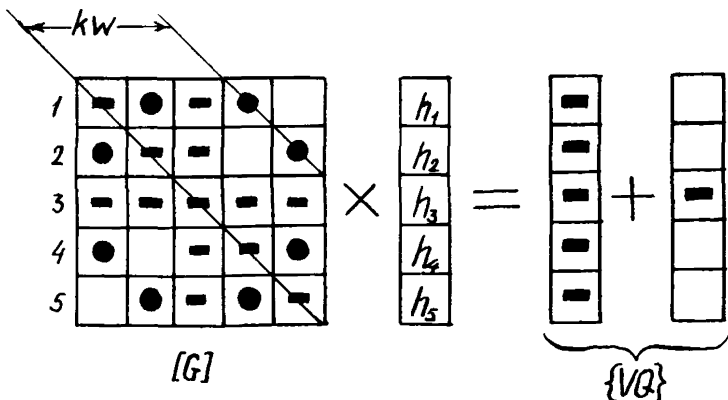


Рис.7. Схема формирования системы уравнений МКЭ.

После того, как на расчетный момент $\tau + \Delta\tau$ будут найдены неизвестные напоры h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 , расходы в этих узлах q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 определяются из уравнения

$$\{q\}_{\tau+\Delta\tau} = [G] \cdot \{h\}_{\Delta\tau+\tau} - \{VQ\}_{\tau}$$

Расчет на следующий момент времени $\tau + 2\Delta\tau$ производится аналогично, для чего вычисленные значения напоров принимаются за на-

чальные условия для этого шага по времени. Процедура вычислений прекращается, если будут исчерпаны все заданные временные шаги.

Метод конечных элементов сравнительно просто применяется и для моделирования на ЭЦМ фильтрации в слоистых толщах, состоящих из водоносных пластов, разделенных слабопроницаемыми глинистыми слоями. Схематически геологическая структура такой трехслойной системы показана на рис.8.

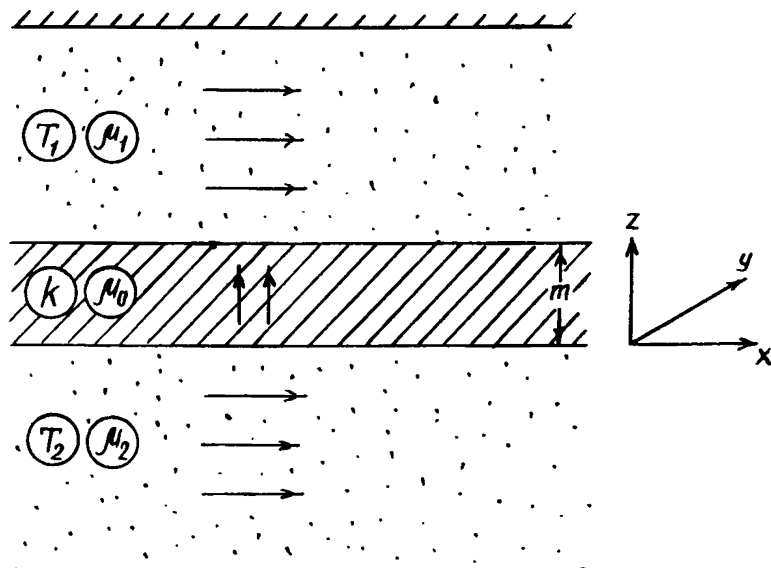


Рис.8. Схема слоистой водоносной системы.

Задача о неустановившейся фильтрации применительно к такой схеме решается на основе следующей системы уравнений [6]:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + K \frac{\partial h_0}{\partial z} \Big|_{z=m} \\
 \mu_0 \frac{\partial h_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K m \frac{\partial h_0}{\partial z} \right); \\
 \mu_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) - K \frac{\partial h_0}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где h_0 — напор в слабопроницаемой прослойке. Применяя ко второму уравнению (15), описывающему вертикальное течение в прослойке, метод конечных элементов, положим

$$h_0(z, t) = \frac{m-z}{m} h_2(t) + \frac{z}{m} h_1(t), \quad (16)$$

тогда, после преобразования, получим

$$\left. \frac{\partial h_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{h_2 - h_1}{m} + \frac{\mu_0}{\kappa} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial h_1}{\partial t} \right); \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial h_0}{\partial z} \right|_{z=m} = \frac{h_2 - h_1}{m} - \frac{\mu_0}{\kappa} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial h_2}{\partial t} \right). \quad (18)$$

Подставив выражения (17) и (18) в систему (15), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \frac{1}{3} \mu_0) \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{6} \mu_0 \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} \right) + \frac{\kappa}{m} (h_2 - h_1) \\ (\mu_2 + \frac{1}{3} \mu_0) \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{1}{6} \mu_0 \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) - \frac{\kappa}{m} (h_2 - h_1) \end{aligned} \quad (19)$$

Разбивая верхний и нижний пласты на конгруэнтные треугольники (рис.9), получим следующее основное уравнение МКЭ, аналогичное уравнению (5)

$$[g] \cdot \{h\} + [m] \cdot \{h\} = \{q\}, \quad (20)$$

где матрицы-коэффициенты имеют вид

$$[g] = \begin{bmatrix} [g_1] + [B] & -[B] \\ -[B] & [g_2] + [B] \end{bmatrix} \quad [m] = \begin{bmatrix} [m_1] & [m_0] \\ [m_0] & [m_2] \end{bmatrix}, \quad (21)$$

причем $[g_1]$ и $[g_2]$ - матрицы проводимости для верхнего и нижнего треугольника соответственно. Остальные обозначения имеют следующий смысл.

$$[B] = \frac{\kappa}{m} [\alpha]; \quad [m_1] = \mu_1 + \frac{1}{3} \mu_0 [\alpha],$$

$$[m_2] = \mu_2 + \frac{1}{3} \mu_0 [\alpha]; \quad [m_0] = \frac{1}{6} \mu_0 [\alpha],$$

$$[\alpha] = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

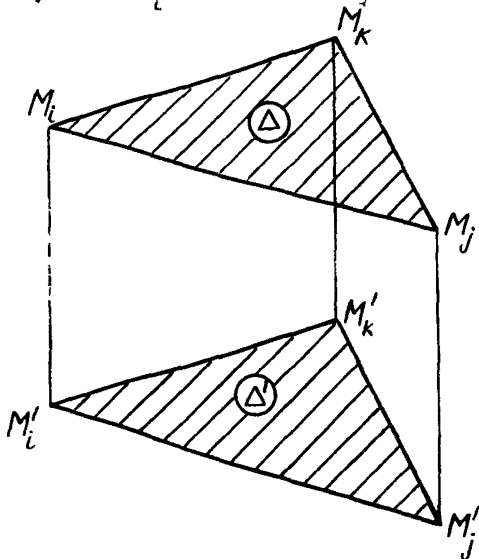


Рис.9. Конечно-элементная схема слоистой системы.

Векторы $\{h\}$ и $\{h^*\}$ имеют шесть строк и характеризуют узловые напоры и производные по времени для верхнего и нижнего треугольника

$$\{h\} = [h_{1i}, h_{1j}, h_{1k}, h_{2i}, h_{2j}, h_{2k}]^T;$$

$$\{h^*\} = [h_{1i}^*, h_{1j}^*, h_{1k}^*, h_{2i}^*, h_{2j}^*, h_{2k}^*],$$

где T - означает операцию транспонирования.

Составление системы уравнений, подобных системе (14), происходит по схеме, описанной выше.

Начальные и граничные условия задаются для каждого слоя отдельно. Описание программы для рассматриваемой схемы ниже не приводится, так как изменения алгоритма незначительны. Следует заметить, что подобного рода задачи требуют примерно в 2,5 раза большего объема памяти ЭЦВМ по сравнению с задачами однослойной схемы и решение их происходит медленнее.

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Схематично алгоритм можно представить в виде шести блоков (рис.10).

1. Блок I - ввод исходных данных.

Вводится информация: номер варианта задачи (NB), количество элементов (MM), количество вершин треугольников (узлов NM), значение расчетного интервала времени (TN), шаг по времени для выдачи результата расчета ($TMAX$), конечное значение времени расчета ($TCON$) и величина (EPS) - максимальная абсолютная разность двух последующих приближений расчета напоров (уровней).

Этот блок осуществляет ввод следующих массивов данных:

$XX(NN), YJ(NN)$ - координаты вершин треугольников рассматриваемой области фильтрации; $NM(3, MM)$ - номера узлов, окружающих данный треугольник; $OPP(MM)$ и $OKP(MM)$ - отметки подошвы и кровли пласта в пределах каждого элемента; $ФК(MM)$ - коэффициент фильтрации или фильтрационная проводимость элемента; $WW(MM)$ и $WL(MM)$ - гравитационная и упругая влагоемкость элемента соответственно; $VH(NN)$ - узловые значения напоров (уровней) на начальный момент времени.

Узловые значения граничных условий задаются массивом $PP(NN)$, причем, если в некотором узле с номером i задан напор h_i , то этому узлу присваивается значение $PP = h_i$, если задан расход Q_i , то $PP = Q_i$. Выборка этих значений осуществляется при помощи массива признаков граничных условий $NP(NN)$. Массив NP состоит из

упорядоченных по всем номерам узлов нулей и единиц и строится следующим образом: если в узле задается граничное условие первого рода (h), то с ним связывается единица, если задается условие второго рода (q), то — нуль. Таким образом, массивы $PP(NN)$ и $NP(NN)$ связаны между собой

$$PP_i = \begin{cases} h(i) & \text{если } NP(i) = 1 \\ q(i) & \text{если } NP(i) = 0 \end{cases}$$

Блок I оформлен в виде специальной подпрограммы "Ввод".

2. Блоки 2 и 3 работают совместно и оформлены в виде подпрограммы. Вначале формируются матрицы проводимости $[g]$ и влагоемкости $[m]$ для каждого элемента и осуществляется их сложение.

Полученное значение отсылается на соответствующее место линейного массива SM , и тем самым осуществляется порочное формирование элементов матрицы левой части выражения (I2) для всей матрицы $[C]$.

Вследствие того, что матрица системы $[G]$ — симметрична и ленточной структуры, в памяти ЭЦМ хранится только верхняя наддиагональная ее часть, занимающая $KW \times NN$ ячеек, где KW — ширина полуполосы матрицы. Одновременно с матрицей формируется вектор правой части выражения (I2)

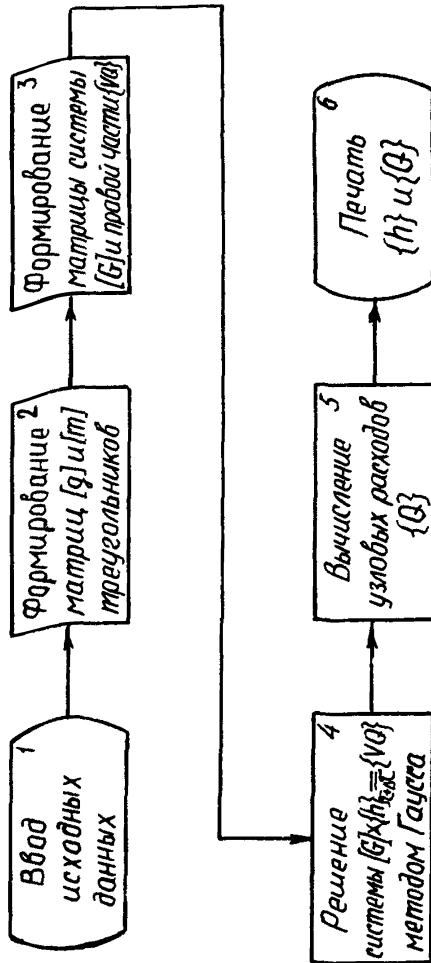


Рис. 10. Блок-схема алгоритма.

$$\{VQ\} = \frac{1}{\Delta\tau} [M] \cdot \{h\}_\tau + \{\bar{w}\} + \{\bar{q}\},$$

где τ — начальный момент времени.

3. Блок 4 осуществляет решение системы линейных алгебраических уравнений.

$$[G] \cdot \{h\}_{\tau+\Delta\tau} = \{VQ\}_\tau$$

методом исключения Гаусса. Результатом работы этого блока является массив узловых значений напоров (уровней) $VH(NN)$ на расчетный момент времени.

4. Блок 5 осуществляет расчет значений расходов в узлах области на расчетный момент времени.

Расходы определяются как вектор

$$\{Q\}_{\tau+\Delta\tau} = [G] \cdot \{h\}_{\tau+\Delta\tau} - \frac{1}{\Delta\tau} [M] \cdot \{h\}_\tau - \{\bar{w}\}.$$

5. Блок 6 осуществляет выдачу на широкую печать АППУ таблицы рассчитанных узловых значений напоров (уровней) h и расходов Q .

Если расчет продолжается для следующего интервала времени, то полученные значения h принимаются за начальное распределение и процедура повторяется сначала, причем массив h при необходимости можно вывести на перфокарты.

При расчетах напорной фильтрации матрица $[G]$ формируется один раз для данной задачи. Для безнапорного режима она формируется в пределах одного временного шага несколько раз, в зависимости от задания величины EPS , так как в этом случае приходится подбирать проводимость пласта $K(h-h_0)$. Точно также подбирается матрица $[G]$ и для напорно-безнапорного режима, причем уточняется не только проводимость безнапорной зоны, но и величина коэффициента влагоемкости для напорной и безнапорной зоны.

4. ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММ

Программы объединены в комплекс МКЭНФ и предназначены для решения плановых нестационарных задач фильтрации в режимах: 1) напорном (программа МКЭННЛ); 2) безнапорном (программа МКЭБНН); напорно-безнапорном (программа МКЭБНБ). Допускается задание граничных условий I и II рода.

Программы написаны и отлажены на алгоритмическом языке ФОРТРАН, транслятор Ф-20. Часть подпрограмм написана на Автокоде. Оригиналы программ хранятся на перфокартах, ГОСТ 6198-75, в фонде алго-

ритмов и программ МИР института ВЮГЕМ. Транслированные программы записаны на магнитной ленте. Для работы с одной из программ необходимо переписать ее с ленты на магнитные барабаны (см. п. 5. Инструкции к пользованию программами).

Максимальное число узловых точек области $NN = 500$; максимальное число треугольников $MM = 800$; максимальная разность номеров узлов в каждом треугольнике равна 29. Время вычисления для одного шага по времени зависит от числа узлов области и ширины полос KW . При ширине полосы $KW = 29$ и числе узлов области $NN = 200$ время расчета для одного временного шага $T_1 = 4$ мин. При решении безнапорных и напорно-безнапорных задач время расчета $T_2 = T_1 \cdot S$, где S - число итераций.

Ввод всего исходного материала осуществляется подпрограммой ввода. На выходе программы печатается:

- 1) номер варианта;
- 2) число узловых точек области;
- 3) число элементов;
- 4) максимальная разность номеров узлов в треугольнике (ширина полосы);
- 5) начальное распределение напоров и расходов;
- 6) расчетное время;
- 7) значение напоров и расходов на данный момент времени для каждого узла.

Выдача по пп. 6) и 7) повторяется.

Программы предусматривают промежуточную выдачу результатов на перфокарты. Такая необходимость может возникнуть при длительном времени решения задачи. На перфокарты выдается значение вектора напоров на расчетный момент времени. При продолжении решения полученный массив используется как вектор начальных условий.

Опыт использования программы для решения практических задач показывает, что при выборе шага по времени необходимо исходить из конкретных особенностей структуры потока. Получение априорных оценок погрешности решения во многих случаях затруднительно. Не всегда можно заранее оценить степень влияния той или иной особенности потока на характер решения, на ход вычислительного процесса и его погрешность. Выход из этого затруднения может быть найден путем составления тестов, которые должны отражать существенные стороны данной гидрогеологической схемы. На таких тестах можно проверить приспособленность алгоритма к правильному воспроизведению и отражению особенностей потока и выявить характер влияния на решение гидрогеологической задачи.

5. ИНСТРУКЦИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММАМИ

Для работы с программами готовится следующая информация:

1) информационная карта. (см. п. 7. Пример подготовки исходной информации);

2) массив $XX(NN)$ - x - координаты вершин треугольников;

3) массив $YY(NN)$ - y - координаты вершин треугольников;

4) массив $PP(NN)$ - граничные условия в узлах сетки,

$$PP(i) = \begin{cases} Q(i) & \text{при } NP = 0 \\ h(i) & \text{при } NP = I; \end{cases}$$

5) массив $VH(NN)$ - начальное распределение напоров (уровней) по узлам;

6) массив $FK(MM)$ - значения коэффициентов фильтрации для каждого треугольника. При решении напорных задач (по программе МКЭННД) в этом массиве записываются значения проводимостей;

7) массив $WW(MM)$ - значение коэффициента водоотдачи при решении напорных и безнапорных задач. При решении напорно-безнапорных задач в этот массив записываются значения коэффициента водоотдачи для безнапорного режима;

8) массив $WU(MM)$ - значения коэффициента упругой водоотдачи. Этот массив вводится только при решении напорно-безнапорных задач;

9) массив ОПП (MM) - отметки подошвы пласта для каждого треугольника;

10) массив ОКП (MM) - отметки кровли пласта. Вводится только при решении напорно-безнапорных задач.

Все данные по пунктам 1-10 вводятся бесформатным вводом и записываются на перфокарты на КУ. После каждого из данных пп. 1-5 ставится своя контрольная сумма.

Массивы 6-10 вводятся также бесформатным вводом, но формируются в зоны по 60 кодов, т.е. после каждых пяти полных перфокарт ставится контрольная сумма. Только в последней зоне может быть меньше, чем 60 кодов;

11) массив $NP(NN)$ - признаки граничных условий. Вводится форматным вводом по формату $J|$. При подготовке исходных данных записывается на бланках ФОРТРАН и заносится на перфокарты на УПП.

При $NP(i) = 0$ в узле i задан расход величиной $PP(i)$ при $NP(i) = I$ в узле i задан уровень величиной $PP(i)$;

12) массив $NM(3,MM)$ - номера узлов, окружающих треугольник. Вводится по формату I9. J

Для работы по одной из программ ее переписывают с ленты на маг-

нитные барабаны. Для работы с программами комплектуется кода перфокарт с директивами ОС-М220.

I. Для вызова программы расчета напорной фильтрации комплектуются директивы.

1. ВЫЗОВ ОС
2. <РАБОТА
3. <РАСПРЕД ДИ = ФИЛЬТР, ДР = МБ
4. <ПЕРЕПИСЬ ДИ
5. <ЗАГРУЗИТЬ МКЭННД

II. Для вызова программы расчета безнапорной фильтрации комплектуются директивы.

1. ВЫЗОВ ОС
2. <РАБОТА
3. <РАСПРЕД ДИ = ИПВС МКЭБ НН, ДР = МБ
4. <ПЕРЕПИСЬ ДИ
5. <РАСПРЕД ДИ = ИПВС.ПОЛОСА, ДР = МБ
6. <ПЕРЕПИСЬ ДИ
7. <ЗАГРУЗИТЬ МКЭБНН

III. Для вызова программы расчета напора-безнапорной фильтрации комплектуются директивы.

1. ВЫЗОВ ОС
2. <РАБОТА
3. <РАСПРЕД ДИ = ИПВС.МКЭНБН, ДР = МБ
4. <ПЕРЕПИСЬ ДИ
5. <РАСПРЕД ДИ = ИПВС.ПОЛОСА, ДР = МБ
6. <ПЕРЕПИСЬ ДИ
7. <ЗАГРУЗИТЬ МКЭНБН

После вызова программы вводятся исходные данные.

Для выдачи вектора $\{h\}$ на перфокарты необходимо на КЗУІ на - брать произвольный код, отличный от нуля. Если значения КЗУІ от - лично от нуля во время выдачи результатов расчета на печать, то происходит обращение к подпрограмме ПЕРФ, которая осуществляет вы - дачу вектора $\{h\}$ на перфокарты. Выданный массив ставится в чита - щее устройство и нажатием клавиши "Пуск машины" производится фик - тивный ввод с контрольным суммированием. При несовпадении конт - рольной суммы нажатием "Пуск машины" выдача повторяется.

6. РАСПЕЧАТКА ПРОГРАММЫ МКЭНБН, ПРЕДНАЗНАЧЕННОЙ
 ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

```

1      PROGRAM МКЭНБН
2      DIMENSION XX,УУ,РР,УН(500)
3      EXTERNAL ЧТЗУ,ЗПЗУ,УПЕРФ
4      УНН=3НУНН;УQ=2НУQ;НН=2ННН;УНС=3НУНС;NM=2НNM;ФК=2НФК;
      SM=2НСМ
5      NP=2НNP;ОПН=3НОПН;WW=2НWW
6      WU=2НWU;ОКП=3НОКП
7      CALL LOADGO(2,2,11,УQ,1,500,НН,1,500,УНС,1,500,NM,1,
      800,ФК,1,800,W
8      *W,1,800,WU,1,800,ОПН,1,800,ОКП,1,800,NP,1,500,SM,1,
      15000,5НRM0ZY)
9      CALL LOADGO(XX,УУ,УН,РР,NP,ФК,WW,WU,ОПН,ОКП,ТН,ТМАХ,
      ТКОН,NM,MM,NN,
10     *NB,EP,ЧТЗУ,ЗПЗУ,6НВВДНБН)
11     TP=TAMX;T=TN
12     CALL LOADGO(NM,MM,NN,KW,ЧТЗУ,6НPOLOSA)
13     DOJ=1,NN
14     CALL ЗПЗУ(УН(I),УНС,I)
15     5  CALL ЗПЗУ(УН(I),НН,I)
16     KK=0
17     ITER=0
18     GO TO 10078
19     10086 CONTINUE
20     CALL LOADGO(XX,УУ,УQ,УНС,НН,SM,ФК,ОПН,ОКП,WW,WU,ТН,
      KW,NN,MM,NM,ЧТЗ
21     *У,ЗПЗУ,6НМАТНБН)
22     DO 10150 I=1,NN
23     IF(ЧТЗУ(NP,I))10150,10149,10150
24     10149 CALL ЗПЗУ(ЧТЗУ(УQ,I)+РР(I),УQ,I)
25     10150 CONTINUE
26     CALL LOADGO(SM,NN,УQ,KW,РР,NP,ЧТЗУ,ЗПЗУ,6НМОДИФ1)
27     CALL LOADGO(УQ,SM,KW,NN,УН,ЧТЗУ,ЗПЗУ,5НГАУСС)
28     201  ST=0
29     DO 10075 I=1,NN
30     PA3=ABS(УН(I)-ЧТЗУ(НН,I))
31     10075 ST=AMAX(ST,PA3)

```

```

32          IF(ST-EP)10200,10200,10077
33 10077 DO 10079 I=1,NN
34          R=ЧТЗУ(НН, I);R=0.5*(R+УН(I))
35          CALL ЗІЗУ(R,НН, I)
36 10079 CONTINUE
37 341     IТЕP=IТЕP+1
38          GOTO 10086
39 10200 CONTINUE
40 351     PRINT 3510, IТЕP
41 361     IТЕP=0
42 3510    FORMAT(1X, 'ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ=', 2X, I4///)
43 1       KK=KK+1;T=T+TN
44          IF(T-TMAX)10186,10186,10087
45 10186 DO 10201 I=1,NN
46          CALL ЗІЗУ(УН(I),НН, I)
47 10201 CALL ЗІЗУ(УН(I),УНС, I)
48          GOTO 10086
49 10087 CONTINUE
50          CALL LOADGO(XX,УУ,УН,УQ,УНС,НН,ФК,ОПН,ОКП,УУ,УН,ТН,
51          *У,ЗІЗУ,6НРАСНВН)
52          T=T-TN
53 10078 CONTINUE
54          CALL LOADGO (KK,Т,УН,УQ,NN,КВ,ЧТЗУ,ЗІЗУ,УІЕРФ,
55          6НІЕЧНВН)
56          DO 7000 I=1,NN
57          CALL ЗІЗУ(УН(I),НН, I)
58          CALL ЗІЗУ(УН( I),УНС, I)
59          IF(KK)10099,10086,10099
60          TMAX=TMAX+ТН
61          T=T+TN
62          IF(TMAX-ТКОН)10086,10086,10088
63 10088 STOP
64          END

```



```

1      SUBROUTINE ВВДНВН(ХХ,УУ,ҮН,РР,НР,ФК,ҰУ,УО,ОП,ОКП,
2      TN,ТМАХ,ТКОН,ММ,
3      *ММ,NN,NB,EP,УТЗУ,ЗПЗУ)
4      DIMENSION ХХ,УУ,РР,ҮН(1)
5      DIMENSION ФФ(60),NR(72)
6      770  FORMAT(I1)
7      771  FORMAT(T9)
8      CALL ВВОД 1(ҮН,ТМАХ,ТКОН,NN,ММ,EP,NB)
9      CALL ВВОДМ(ХХ,NN)
10     CALL ВВОДМ(УУ,NN)
11     CALL ВВОДМ(РР,NN)
12     CALL ВВОДМ(ҮН,NN)
13     C
14     C      ВВОД МАССИВОВ ФК,ОКП,ОП
15     C
16     IPE=1
17     39   IF(IPE-6)38,63,63
18     38   IF(MM-60)40,41,41
19     40   KФ=MM;GOTO 42
20     41   KФ=60
21     42   I=1
22     13   CALL ВВОДМ(ФФ,KФ);GOTO(60,61,611,62,622,63),IPE
23     60   DO 6 J=1,KФ
24     6    CALL ЗПЗУ(ФФ(J),ФК,I+J-1)
25     7    IF(I+60-MM)11,11,12
26     11   IF(I+120-MM)15,15,16
27     15   I=I+60;GOTO 13
28     16   I=I+60;KФ=MM-I+1;GOTO 13
29     12   IPE=IPE+1;GOTO 39
30     61   DO 53 J=1,KФ
31     53   CALL ЗПЗУ(ФФ(J),ҰУ,I+J-1)
32     7    GOTO 7
33     611  DO 533 J=1,KФ
34     533  CALL ЗПЗУ(ФФ(J),УУ,I+J-1)
35     7    GOTO 7

```

```

35 62      DO 54 J=1,KФ
36 54      CALL ЗПЗУ(ФФ(J),ОПШ,I+J-1)
37          GOTO 7
38 622     DO 544 J=1,KФ
39 544     CALL ЗПЗУ(ФФ(J),ОКП,I+J-1)
40          GOTO 7
41  C
42  C      ВВОД МАССИВОВ NP И NM
43  C
44 63      I=1
45 47      READ 770,(NR(J),J=1,72)
46          DO 44 J=1,72
47 44      CALL ЗПЗУ(NR(J),NP,I+J-1)
48          IF(I+72-NN) 45,45,46
49 45      I=I+72;GOTO 47
50 46      I=1
51 51      READ 771,(NR(J),J=1,8)
52          DO 48 J=1,8
53 48      CALL ЗПЗУ(NR(J),NM,I+J-1)
54          IF(I+8-MM)49,49,50
55 49      I=I+8;GOTO 51
56 50      PRINT 1006,NB
57          PRINT 1005,NN
58          PRINT 1004,MM
59 1006     FORMAT(56X,'ВАРИАНТ',3X,I5///)
60 1005     FORMAT(12X,'ЧИСЛО УЗЛОВ РАВНО',I5///)
61 1004     FORMAT(12X,'ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ РАВНО',I6///)
62          RETURN
63          END

```

```

1      SUBROUTINE МАТНВН(ХХ,УУ,УQ,УНС,НН,SM,ФК,ОПН,ОКП,WW,WU,
      TN,KW,NN,MM,
2      *NM,ЧТЗУ,ЗПЗУ)
3      DIMENSION X,У,Н,NR(3),A,AA,B(3,3),XX,УУ(1)
4      10002 FORMAT(1X,'ПЛОЩАДЬ ЭЛЕМЕНТА',2X,I4,' РАВНА НУЛЮ'////)
5      3      FORMAT(1X,'ПЕРПЕНДИКУЛЯР В ЭЛЕМЕНТЕ',2X,I4////)
6      КУ=KW*NN
7      10086 DO 11125 I=1,NN
8      11125 CALL ЗПЗУ(0.,УQ,I)
9      DO 10027 I=1,КУ
10     10027 CALL ЗПЗУ(0.,SM,I)
11     DO 10148 I=1,MM
12     10085 NM1=ЧТЗУ(NM,I)
13     NR(I)=NM1/1000000
14     NR1=NM1-NR(1)*1000000
15     NR(2)=NR1/1000
16     NR(3)=NR1-NR(2)*1000
17     DO 10028 J=1,3
18     NPN=NR(J)
19     H(J)=ЧТЗУ(НН,NPN)
20     X(J)=XX(NPN)
21     10028 Y(J)=УУ(NPN)
22     X21=X(2)-X(1);X13=X(1)-X(3);X32=X(3)-X(2);Y12=Y(1)-
      Y(2)
23     Y23=Y(2)-Y(3);Y31=Y(3)-Y(1)
24     S=(X21*Y31-X13*Y22)/2
25     IF(S)10029,10030,10129
26     10029 S=-S
27     GOTO 10129
28     10030 PRINT 10002,I
29     10129 HCP=(H(1)+H(2)+H(3))/3
30     ПН=ЧТЗУ(ОПН,I);ФК1=ЧТЗУ(ФК,I);ПК=ЧТЗУ(ОКП,I)
31     IF(HCP-ПК)16,16,17
32     16     BK=ЧТЗУ(WW,I);HCP=HCP-ПН;GOTO 770
33     17     BK=ЧТЗУ(WU,I);HCP=ПК-ПН;GOTO 770
34     770     IF(HCP)1,1,2

```

```

35 1 PRINT 3,I
36 4  $\Phi K1=0.0001$ ;GOTO777
37 2  $\Phi K1=\Phi K1*HCP$ ;D=S*BK/(12*TN);GOTO777
38 777  $\Phi K1=\Phi K1/(4*S)$ 
39  $A(1,2)=\Phi K1*(Y23*Y31+X32*X13)$ 
40  $A(1,3)=\Phi K1*(Y23*Y12+X32*X21)$ 
41  $A(2,3)=\Phi K1*(Y31*Y12+X13*X21)$ 
42  $A(1,1)=-A(1,2)-A(1,3)$ 
43  $A(2,1)=A(1,2)$ 
44  $A(2,2)=-A(2,1)+A(2,3)$ 
45  $A(3,1)=A(1,3)$ 
46  $A(3,2)=A(2,3)$ 
47  $A(3,3)=-A(3,1)+A(3,2)$ 
48  $AA(1,1)=A(1,1)+2*D$ ;  $AA(2,2)=A(2,2)+2*D$ ;  $AA(3,3)=A(3,3)+2*D$ 
49  $AA(1,3)=AA(3,1)=A(1,3)+D$ ;  $AA(1,2)=AA(2,1)=A(1,2)+D$ 
50  $AA(2,3)=AA(3,2)=A(2,3)+D$ 
51  $B(1,1)=2*D$ ;  $B(2,2)=2*D$ ;  $B(3,3)=2*D$ 
52  $B(1,2)=B(2,1)=D$ ;  $B(1,3)=B(3,1)=B(2,3)=B(3,2)=D$ 
53 DO 10042 J=1,3
54 NPN=NR(J)
55 R1=ЧТЗУ(YQ,NPN)
56 DO 10051 K=1,3;MPM=NR(K)
57 R2=ЧТЗУ(YHC,MPM)
58 R2=B(J,K)*R2;R1=R1+R2
59 10051 CONTINUE
60 CALL ЗПЗУ(R1,YQ,NPN)
61 10042 CONTINUE
62 10043 DO 10148 J=1,3
63 N1=NR(J)
64 DO 10148 K=J,3
65 N2=NR(K)

```

```
66          IF(N1-N2)10044,10044,10045
67  10044  L=(N1-1)*RW+N2-N1+1
68          GOTO 10046
69  10045  L=(N2-1)*RW+N1-N2+1
70  10046  S1=UTBY(SM,L)
71  10148  CALL SPZY(S1+AA(J,R),SM,L)
72          RETURN
73          END
```

```

1      SUBROUTINE FAYCC(YQ, SM, KW, NN, VH, UTSY, ZHSY)
2      DIMENSION VH(1)
3      DIMENSION DM(496), DMM, YVQ(32)
4      L=M=L2=L3=0
5      DO 32 I=1, KW
6      YVQ(I)=UTSY(YQ, I)
7      L2=(KW-I+1)*L3+L2
8      DO 33 J=I, KW
9      JJ=J+(KW-1)*(I-1)
10     33  DM(L2+J)=UTSY(SM, JJ)
11     32  L3=1
12     100  YVQ(1)=YVQ(1)/DM(1)
13     CALL ZHSY(YVQ(1), YQ, 1+L)
14     DO 40 J=1, KW-M
15     DMM(J)=DM(J)/DM(1)
16     JJ=J+KW*L
17     40  CALL ZHSY(DMM(J), SM, JJ)
18     L2=0
19     DO 41 I=2, KW-M
20     YVQ(I)=YVQ(I)-YVQ(1)*DM(I)
21     L2=L2+KW-I+1
22     DO 41 J=I, KW-M
23     41  DM(L2+J)=DM(L2+J)-DM(I)*DMM(J)
24     L2=L3=0
25     DO 50 I=1, KW-1-M
26     YVQ(I)=YVQ(I+1)
27     L2=(KW-I+1)*L3+L2
28     DO 56 I=I, KW-1-M
29     56  DM(L2+J)=DM(L2+KW+J-I+1)
30     L3=1
31     IF(NN-KW-L)101, 101, 60
32     101  M=M+1; L=L+1
33     IF(KW-M-2)200, 100, 100
34     60  L=L+1
35     YVQ(KW)=UTSY(YQ, KW+L)

```

```

36      L2=0
37      DO 51 I=1,KW
38      L1=KW-I+1
39      L2=L2+L1;JJ=L*KW+(KW-1)*I+1
40  51   DM(L2)=4TSY(SM,JJ)
41      GOTO 100
42  200  LR=1
43      YH(NN)=YQ(1)/DM(1)
44      DO 202 I=1,NN-1
45      Y1H=4TSY(YQ,NN-1)
46      DO 203 J=1,LR
47      JJ=KW*(NN-I-1)+1+J
48  203  Y1H=Y1H-4TSY(SM,JJ)*YH(J-I+NN)
49      YH(NN-I)=Y1H
50      IF(KW-LR-1)202,202,204
51  204  LR=LR+1
52  202  CONTINUE
53      RETURN
54      END

```

```

1      SUBROUTINE ПЕЧЕНЬ(КК, Т, УН, УQ, NN, КW, ЧТЗУ, ЗПЗУ, УЦЕРФ)
2      DIMENSION УН(1)
3  200  FORMAT(50X, 'НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ'///)
4  201  FORMAT(50X, 'БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ'///)
5  202  FORMAT(40X, 'НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ'///)
6  203  FORMAT(1X, 'РАСЧЕТ НА ВРЕМЯ Т=', F8.2, ' СУТОК'///)
7  204  FORMAT(1НI, 5(2X, I5, 2X, 1НI, F11.3, 2X, 1НI))
8  205  FORMAT(120(1Н*)/1НI, 5(9X, 'I', 13X, 1НI)/1НI, 5(3X, 'УЗЕЛ',
      2X, 'I', 4X, 'Н
9      *АПОР', 4X, 'I')/1НI, 5(9X, 'I', 13X, 1НI)/120(1Н*))
10  206  FORMAT(120(1Н*)///)
11  207  FORMAT(120(1Н*)/1НI, 5(9X, 'I', 13X, 1НI)/1НI, 5(3X, 'УЗЕЛ',
      2X, 'I', 3X, 'P
12      *АСХОД', 4X, 'I')/1НI, 5(9X, 'I', 13X, 1НI)/120(1Н*))
13  208  FORMAT(5X, 'ШИРИНА ПОЛОСЫ РАВНА', I6)
14  209  FORMAT(40X, 'НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПОРОВ')
15      LNP=-1
16      IF(КК)1,2,1
17  1    PRINT 203, Т; IF(LNP)12,11,13
18  2    PRINT 208, КW
19      PRINT 209; GOTO 3
20  11   PRINT 201; GOTO 3
21  12   PRINT 202; GOTO 3
22  13   PRINT 200
23  3    PRINT 205
24      I=1
25  81   Н1=УН(I); Н2=УН(I+1); Н3=УН(I+2); Н4=УН(I+3); Н5=УН(I+4)
26      I1=I+1; I2=I+2; I3=I+3; I4=I+4
27      PRINT 204, I, Н1, I1, Н2, I2, Н3, I3, Н4, I4, Н5
28      I=I+5; IF(I-NN)81,81,82
29  82   PRINT 206
30      PRINT 207
31      I=1

```



```
32 83 H1=4T3Y(YQ,I);H2=4T3Y(YQ,I+1);H3=4T3Y(YQ,I+2);H4=4T3Y
      (YQ,I+3)
33 H5=4T3Y(YQ,I+4);I1=I+1;I2=I+2;I3=I+3;I4=I+4
34 PRINT 204,I,H1,I1,H2,I2,H3,I3,H4,I4,N5
35 I=I+5;IF(I-NN)83,83,84
36 84 PRINT 206
37 CALL VHEPΦ(K3Y)
38 IF(K3Y)101,102,101
39 101 CALL LOADGO (YH(1),YH(NN),4HHEPΦ)
40 102 RETURN
41 END
```

```

1      SUBROUTINE PACHBH(XX,YY,YN,YQ,YHC,HH,ФK,ОПI,ОКI,WW,WU,
      TN,KW,NM,MM,
2      *NN,ЧТЗУ,ЭПЗУ)
3      DIMENSION X,Y,NR(3),A,B,AA(3,3),XX,YY,YN(1)
4      DIMENSION H(3)
5 10002  FORMAT(1X,'ПЛОЩАДЬ ЭЛЕМЕНТА',2X,I4,'РАВНА НУЛЮ'////)
6      3      FORMAT(1X,'ПЕРЕПОНИЖАНИЕ В ЭЛЕМЕНТЕ',2X,I4////)
7      KW=KW*NN
8 10086  DO 11125 I=1,NN
9 11125  CALL ЭПЗУ(C.,YQ,I)
10     DO 10148 I=1,MM
11 110085 NM1=ЧТЗУ(NM,I)
12     NR(1)=NM1/1000000
13     NR1=NM1-NR(1)*1000000
14     NR(2)=NR1/1000
15     NR(3)=NR1-NR(2)*1000
16     DO 10028 J=1,3
17     NPN=NR(J)
18     H(J)=ЧТЗУ(HH,NPN)
19     X(J)=XK(NPN)
20 10028  Y(J)=YU(NPN)
21     X21=X(2)-X(1);X13=X(1)-X(3);X32=X(3)-X(2);Y12=Y(1)-Y(2)
22     Y23=Y(2)-Y(3);Y31=Y(3)-Y(1)
23     S=(X21*Y31-X13*Y12)/2
24     IF(S)10029,10030,10129
25 10029  S=-S
26     GOTO 10129
27 10030  PRINT 10002,I
28 10129  HCP=(H(1)+H(2)+H(3))/3
29     ПП=ЧТЗУ(ОПI,I);ФK1=ЧТЗУ(ФK,I);ПК=ЧТЗУ(ОКI,I)
30     IF(HCP-ПК)16,16,17
31 16     BK=ЧТЗУ(WW,I);HCP=HCP-ПП;GOTO 770
32 17     BK=ЧТЗУ(WU,I);HCP=ПК-ПП;GOTO 770
33 770    IF(HCP)1,1,2

```

```

34 1      PRINT 3,I
35 4       $\Phi K1=0.0001$ ;GOTO 777
36 2       $\Phi K1=\Phi K1*HCP$ ;D=S*BK/(12*TN);GOTO777
37 777     $\Phi K1=\Phi K1/(4*S)$ 
38        A(1,2)= $\Phi K1*(Y23*Y31+X32*X13)$ 
39        A(1,3)= $\Phi K1*(Y23*Y12+X32*X21)$ 
40        A(2,3)= $\Phi K1*(Y31*Y12+X13*X21)$ 
41        A(1,1)=-A(1,2)-A(1,3)
42        A(2,1)=A(1,2)
43        A(2,2)=-A(2,1)+A(2,3))
44        A(3,1)=A(1,3)
45        A(3,2)=A(2,3)
46        A(3,3)=-A(3,1)+A(3,2))
47        AA(1,1)=A(1,1)+2*D;AA(2,2)=A(2,2)+2*D;AA(3,3)=A(3,3)+
          2*D
48        AA(1,3)=AA(3,1)=A(1,3)+D;AA(1,2)=AA(2,1)=A(1,2)+D
49        AA(2,3)=AA(3,2)=A(2,3)+D
50        B(1,1)=2*D;B(2,2)=2*D;B(3,3)=2*D
51        B(1,2)=B(2,1)=D;B(1,3)=B(3,1)=B(2,3)=B(3,2)=D
52        DO 10042 J=1,3
53        NPN=NR(J)
54        DO 10042 K=1,3
55        MPM=NR(K)
56        R1=4T3Y(VQ,NPN);R2=4T3Y(VHC,MPM);R1=R1+AA(J,K)*VH(MPM)
57        R1=R1-B(J,K)*R2
58        CALL 3UISY(R1,VQ,NPN)
59 10042  CONTINUE
60 10148  CONTINUE
61      RETURN
62      END

```

```
1      SUBROUTINE POLOSA(NM,MM,NN,KW,UTBY)
2      DIMENSION NR(3)
3      KW=0
4      DO 10124 I=1,MM
5      MAX=0;MIN=500;NM1=UTBY(NM,I);NR(1)=NM1/1000000
6      NR1=NM1-NR(1)*1000000
7      NR(2)=NR1/1000;NR(3)=NR1-NR(2)*1000
8      DO 10021 J=1,3
9      NA=NR(J)
10     IF(NA-MIN)10019,10020,10020
11 10019 MIN=NA
12 10020 IF(NA-MAX)10022,10022,10021
13 10021 MAX=NA
14 10022 IF(MAX-MIN-KW)10124,10023,10023
15 10124 CONTINUE
16 10023 KW=MAX-MIN+1
17     RETURN
18     END
```

```
1      SUBROUTINE МОДУЛ1(SM,NN,YQ,KW,PP,NP,УТЗУ,ЗНЗУ)
2      DIMENSION PP(1)
3      DO 1 I=1,NN
4      IF(УТЗУ(NP,I)1,1,2
5 2     L=(I-1)*KW+1
6      R1=УТЗУ(SM,L);R1=R1*10**10;CALL ЗНЗУ(R1,SM,L)
7      R1=УТЗУ(SM,L);R1=R1*PP(I);CALL ЗНЗУ(R1,YQ,I)
8 1     CONTINUE
9      RETURN
10     END
```

7. ПРИМЕР ПОДГОТОВКИ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(НАПОРНО-БЕЗНАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ)

Схематично область фильтрации представлена на рис. II. Начало координат находится в точке *A*. На границе *AB* в узлах 2 и 4 рас-

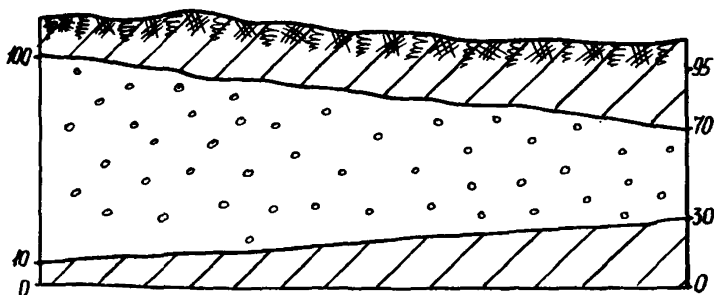
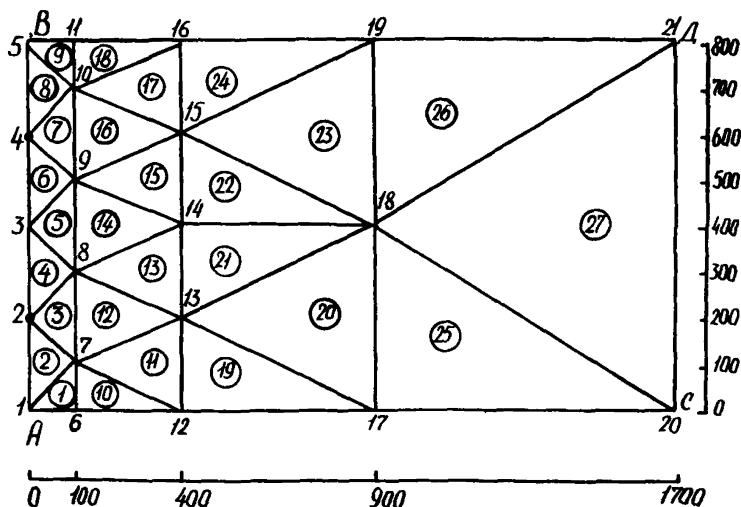


Рис. II. Напорно-безнапорное движение.

положены совершенные скважины, работающие с постоянным дебитом $Q = 1000 \text{ м}^3/\text{сут.}$ Вдоль границы *CD* поддерживается постоянный напор $h = 95,0 \text{ м.}$ Границы *AC* и *BD* - непроницаемые. Коэффициент филь-

рации для всей области принят постоянный $K = 15,8$ м/сут, коэффициенты упругой и гравитационной водоотдачи имеют значения: $\mu_{упр} = 10^{-4}$ и $\mu_{гр} = 5 \cdot 10^{-2}$. Для данной тестовой задачи число узлов $NN = 21$, число элементов $MM = 27$. Исходная информация записывается на бланках. В соответствии с принятой системой координат и триангуляцией, строго по порядку номеров узлов, выписываются координаты вершин треугольников: массив XX (2I) – карты 2,3 и массив YY (2I) – карты 4,5. Поскольку условия задачи таковы, что граница DC является границей водоёма, на которой $h = 95,0$ м, то в узлах 20 и 2I $PP = 95,0$. В узлах 2 и 4 осуществляется водоотбор, по условию в этих узлах $PP = Q = -1000$ м³/сут. В остальных узлах внешний приток или отток отсутствует, поэтому в них $PP = 0$. Запись этих условий составляет массив PP (2I), помещенный на картах 6,7. Примем начальное распределение напора, горизонтальную плоскость, с отметкой $h = 95$ м. Тогда массив VH будет таким, как записано на картах 8,9.

По порядку номеров треугольников выписывается на бланках информация: коэффициенты фильтрации ΦK – карты 10, 11, 12; коэффициенты гравитационной водоотдачи WW – карты 13, 14, 15; коэффициенты упругой водоотдачи WU – карты 16, 17, 18; отметки подошвы пласта ОПП – карты 19, 20, 21 и отметки кровли пласта ОКП – карты 22, 23, 24.

Информационная карта (карта I) состоит из следующей информации, записанной по строкам на бланке:

- 1) TN – расчетный интервал времени, $TN = 10$ сут;
- 2) T_{max} – шаг по времени для выдачи на печать результатов расчета. Например, если $T_{max} = 10$, то результаты будут печататься для каждого интервала, если положить $T_{max} = 20$, то выдача на печать результатов будет через один интервал;
- 3) $T_{кон}$ – время окончания расчета; $T_{кон} = 50$ сут;
- 4) число узлов $NN = 21$;
- 5) число элементов $MM = 27$;
- 6) EPS – величина, характеризующая максимальное абсолютное отклонение двух последовательных значений номеров, при которой прекращается дальнейшее уточнение положения безнапорной зоны и проводимостей. Эта величина (EPS) нужна для организации итерационного процесса. Можно выбирать значение $EPS = 0,1 \cdot \Delta h_{max}$ или из условия $0,1 \cdot M_{ср}$, где $M_{ср}$ – средняя мощность потока. Следует иметь в виду, что, чем меньше EPS , тем точнее будет решение, но при этом время решения задачи возрастает. В нашем примере $EPS = 0,5$;

7) номер варианта или задача $NB = I$.

Признаки граничных условий, массив NP записываются на бланках ФОРТРАН по формату $J1$. Поскольку этот массив состоит из нулей и единиц, то для каждой цифры отводится одна позиция строки бланка. В рассматриваемом примере во всех узлах, за исключением узла 20 и 21, задан расход (нулевой или отличный от нуля), поэтому в позициях от 1 до 19 включительно записываются нули (\emptyset), а в позициях 20 и 21 — единица.

Если строка не заполнена до конца, то ее дополняют нулями (карта 25).

Номера узлов по треугольникам, массив NM , также записывают на бланках ФОРТРАН, но по формату $I9$ (карты 26-29), т.е. для каждого узла отводится три позиции из предположения, что номер узла может быть трехзначным. Например, номер 126 будет записан как 126, номер 78 — как 078, номер 9 — как 009. Если карта не закончена, ее надо дописать нулями.

Результаты расчета тестовой задачи приведены ниже. Время расчета на один шаг по времени вместе с печатью около одной минуты.

Л и т е р а т у р а

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., "Мир", 1975, 275 с.
2. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М., "Недра", 1974, 240 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., "Мир", 1977, 349 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М., "Мир", 1976, 464 с.
5. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М., "Мир", 1976, 96 с.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., "Наука", 1977, 664 с.
7. Васильев В.А., Карачевцев Н.Ф., Шитов А.И. Моделирование плановых нестационарных потоков подземных вод методом конечных элементов, тезисы докладов на Всесоюзном семинаре по вопросам моделирования процессов переноса подземных вод. М., Центральное правление НТГО, 1978, 28-30 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., "Наука", 1977, 656 с.
9. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. М., "Недра", 1976, 407 с.

ИМПР: ТБСТ		СТР. 1		
КАРТА № 1	02	1		
	02	1		
	02	5		
	02	21		
	02	27		
	01	5		
	01	1		
	Z			
КАРТА № 2	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	03	1		
	03	1		
	03	1		
	03	1		
	03	1		
КАРТА № 3	03	4		
	03	4		
	03	4		
	03	4		
	03	9		
	03	9		
	03	9		
	04	17		
	04	17		
	Z			
КАРТА № 4	0	0		
	03	2		
	03	4		
	03	6		
	03	8		
	0	0		
	03	1		
	03	3		
	03	5		
	03	7		
КАРТА № 5	03	2		
	03	4		
	03	6		
	03	8		
	0	0		
	03	4		
	03	8		
	0	0		
	03	8		
	Z			
КАРТА № 6	0	0		
	04	1		
	0	0		
	04	1		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
КАРТА № 7	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	0	0		
	02	95		
	02	95		
	Z			
	КАРТА № 8	02	95	
		02	95	
02		95		
02		95		
02		95		
02		95		
02		95		
02		95		
02		95		
02		95		

НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПОРОВ

Число узлов = 21. Число элементов = 27. Ширина полосы = 7.

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	95.000	2	95.000	3	95.000	4	95.000	5	95.000
6	95.000	7	95.000	8	95.000	9	95.000	10	95.000
II	95.000	12	95.000	13	95.000	14	95.000	15	95.000
16	95.000	17	95.000	18	95.000	19	95.000	20	95.000
21	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	.000	2	.000	3	.000	4	.000	5	.000
6	.000	7	.000	8	.000	9	.000	10	.000
II	.000	12	.000	13	.000	14	.000	15	.000
16	.000	17	.000	18	.000	19	.000	20	.000
21	.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Число итераций = 1. Расчет на время T = 10.00 суток

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	93.977	2	93.583	3	93.96	4	93.583	5	93.977
6	93.974	7	93.939	8	93.941	9	93.941	10	93.939
II	93.974	12	94.231	13	94.229	14	94.229	15	94.229
16	94.231	17	94.473	18	94.473	19	94.473	20	95.000
21	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	-.000	2	-1000.000	3	-.000	4	-1000.000	5	.000
6	.000	7	.000	8	-.000	9	-.000	10	-.000
II	-.000	12	.000	13	-.000	14	-.000	15	.000
16	.000	17	.000	18	-.000	19	-.000	20	221.534
21	221.534	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ
 Число итераций = I. Расчет на время T = 20.00 суток

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	93.213	2	92.813	3	93.196	4	92.813	5	93.213
6	93.216	7	93.179	8	93.181	9	93.181	10	93.179
II	93.216	12	93.558	13	93.556	14	93.556	15	93.556
16	93.558	17	94.012	18	94.012	19	94.012	20	95.000
21	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	-.000	2	-1000.000	3	-.000	4	-1000.000	5	-.000
6	-.000	7	-.000	8	-.000	9	-.000	10	-.000
II	.000	12	-.000	13	.000	14	-.000	15	.000
16	.000	17	-.000	18	.000	19	-.000	20	415.679
21	415.679	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Число итераций = I. Расчет на время T = 30.00 суток

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	92.643	2	92.239	3	92.625	4	92.239	5	92.643
6	92.651	7	92.612	8	92.614	9	92.614	10	92.612
11	92.651	12	93.050	13	93.048	14	93.048	15	93.048
16	93.050	17	93.664	18	93.664	19	93.664	20	95.000
21	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	.000	2	-1000.000	3	-.000	4	-1000.000	5	-.000
6	.000	7	-.000	8	.000	9	-.000	10	-.000
11	-.000	12	.000	13	-.000	14	-.000	15	.000
16	.000	17	-.000	18	-.000	19	-.000	20	562.283
21	562.283	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Число итераций = 0. Расчет на время T = 40.00 суток.

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	92.216	2	91.811	3	92.198	4	91.811	5	92.216
6	92.227	7	92.188	8	92.190	9	92.190	10	92.188
II	92.227	12	92.669	13	92.667	14	92.667	15	92.667
16	92.669	17	93.403	18	93.403	19	93.403	20	95.000
21	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	.000	2	-1000.000	3	-.000	4	-1000.000	5	-.000
6	-.000	7	-.000	8	-.000	9	-.000	10	.000
II	-.000	12	-.000	13	-.000	14	.000	15	-.000
16	.000	17	-.000	18	.000	19	-.000	20	672.230
21	672.230	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Число итераций = 0. Расчет на время T = 50.00 суток

Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор	Узел	Напор
I	91.896	2	91.489	3	91.878	4	91.489	5	91.896
6	91.910	7	91.870	8	91.872	9	91.872	10	91.870
II	91.910	12	92.385	13	92.383	14	92.382	15	92.383
I6	92.385	17	93.208	18	93.208	19	93.208	20	95.000
2I	95.000	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход	Узел	Расход
I	.000	2	-1000.000	3	-.000	4	-1000.000	5	-.000
6	-.000	7	-.000	8	-.000	9	-.000	10	-.000
II	.000	12	-.000	13	-.000	14	-.000	15	.000
I6	.000	17	.000	18	-.000	19	.000	20	754.378
2I	754.378	22	.000	23	.000	24	.000	25	.000

СО Д Е Р Ж А Н И Е

1. Введение	3
2. Постановка задач	4
3. Описание алгоритма	16
4. Характеристика программ	18
5. Инструкция к пользованию программами	20
6. Распечатка программы МКЭНБН, предназначенной для решения задач напорно-безнапорной фильтрации	22
7. Пример подготовки исходной информации (напорно-безнапорная фильтрация).	37
Литература	39

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ
ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ЭЦЕМ**

Научный редактор канд. техн. наук С.Г.Аксенов

Литературный редактор Л.А.Порубай

Технический редактор А.Г.Воронцова

Корректор И.А.Соляр. Художник Б.М.Попов

Подписано к печати 30 марта 1979 г.

Объем 2,8 уч.-изд.л. Тираж 170 экз. Заказ № 273.

Ротапринт ВЮГЕМ, Белгород, Б.Хмельницкого, 86.

Цена 40 коп.