ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26

ОЦЕНКА МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ФОТОУПРУГОСТИ ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА И ОСОБЕННОСТЕЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ ОСНОВАНИЙ СЕЙСМОСТОЙКИХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА ИХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ КРИТЕРИЕВ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Часть 2

Анализ методов сейсмических расчетов упруго-пластических конструкций и разработка методов их расчета на основе количественных критериев повреждений

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Научный руководитель доктор технических наук профессор	И.Х.Костин
Доктор технических наук профессор	В.И.Жарницкий
Доктор технических наук профессор	Г.В.Рыков
Старший научный сотрудник доктор технических наук	Ю.Л.Голда
Инженер	С.О.Авдеева

Р Е Ф Е Р А Т

Отчет 97 с., 37 рис., 2 табл. 28 источников

ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ. СЕЙСМОСТОЙКИЕ ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ. СЕЙСМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ БЕТОНА И АРМАТУРЫ. ПРЯМОЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Разрабатываются прямые динамические методы расчета железобетонных конструкций сейсмостойких зданий и сооружений. Проведен анализ сейсмических нагрузок и даны рекомендации по расчетным нагрузкам. Разработаны количественные критерии предельного состояния по несущей способности. На основе анализа рекомендовано использовать численные методы, основанные на диаграммах $\sigma - \varepsilon$ арматуры и бетона. Выполнены расчеты системы с одной степенью свободы со скелетной диаграммой сопротивления типа Прандтля; приведен анализ результатов и даны рекомендации в СНиП.

Разработана реологическая модель бетона и арматуры для определения динамических диаграмм $\sigma - \varepsilon$ при малоцикловых колебаниях. Модели подтверждены экспериментально. Приведены результаты сейсмического расчета железобетонной рамы, в элементах которой возникают значительные упругопластические деформации.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение 1

Основная часть

I. Анализ нагрузок от землетрясений на здания и сооружения применительно к динамическому расчету с учетом неупругих свойств материалов конструкций 4

2. Анализ методов сейсмических расчетов упругопластических конструкций. Динамическое деформирование бетона и арматуры. Критерии предельного состояния 9

2.I. Методы расчета конструкций с учетом упругопластических деформаций на особые динамические нагрузки 9

2.2. Модели деформирования бетона и арматуры при малоцикловых динамических воздействиях 13

2.3. Количественные критерии расчетного предельного состояния по несущей способности 27

3. Метод расчета зданий и сооружений, рассматриваемых как плоские рамы 34

3.I. Уравнения колебаний упругопластических конструкций .. 34

3.2. Напряженно-деформированное состояние в сечении железобетонного стержня в процессе колебаний 50

4. Особенности колебаний здания, как системы с одной степенью свободы, характеризующейся идеальной упругопластической диаграммой сопротивления 70

5. Сейсмический расчет здания как рамы численными методами с учетом упругопластических деформаций бетона и арматуры.

5.I. Исходные предпосылки и данные 77

5.2. Результаты расчета 81

5.3. Анализ результатов 90

Заключение 93

ВВЕДЕНИЕ

Расчеты железобетонных конструкций на действие особых динамических нагрузок аварийного типа производятся по предельным состояниям первой группы, допускающим остаточные деформации, т.е. пластические деформации арматуры и бетона. Использование пластических деформаций позволяет при заданных динамических воздействиях существенно снизить материалоемкость конструкции (по сравнению с упругой) за счет повышения ее энергоемкости и увеличения расчетных динамических сопротивлений арматуры и бетона. Методы расчета таких конструкций на взрыв и удар проработаны достаточно глубоко, снабжены необходимыми критериями расчетных предельных состояний.

Методы расчета конструкций сейсмостойких зданий и сооружений нуждаются в развитии. Действующий СНиП-II 7-81 не предусматривает прямых динамических расчетов, хотя, и допускает пластическую работу конструкций (точнее ее повреждение); расчетные силы в этом случае предлагается определять умножением коэффициентов динамичности для упругой стадии на понижающие коэффициенты. В проекте нового СНиП по сейсмостойкому строительству такой подход исключен и в пластической стадии допускается применять прямой динамический расчет конструкции на инструментальную или синтезированную акселерограмму. Актуальность обеспечения расчетного аппарата сейсмостойкого строительства современными методами расчета несомненна.

В последние годы в расчетах железобетонных конструкций все более широкое применение находит "$\sigma - \varepsilon$"-метод, основанный на использовании диаграмм деформирования материалов и теоретических диаграммах сопротивления конструкций. Этот метод обладает широкими возможностями и в сочетании с конечно-разностным решением уравнений колебаний позволяет решать сложные задачи динамики, включая знакопеременные колебания с переменной амплитудой, путем прямого динамического расчета во времени.

Однако, несмотря на широкие возможности "$\sigma - \varepsilon$"-метода, область его применения в настоящее время ограничивается плоскими задачами (плоские рамы), а решение пространственных задач сводятся к случаям, не приводящим к непомерно большому количеству неизвестных. Принципиально этот метод представляет возможность решать динамические задачи любой сложности при условии наличия необходимых данных (в частности, позволяющих вычислять динамические диаграммы "$\sigma - \varepsilon$" бетона при 2-х и 3-х осном напряженном состоянии).

Цель работы: разработка методов расчета зданий и сооружений на сейсмические нагрузки как плоских систем в пластической стадии работы на основе современных положений динамики железобетона и механики упругопластических материалов.

Рассматриваются теоретические вопросы, направленные на разработку методов расчета железобетонных сейсмостойких конструкций зданий и сооружений (на основе "$\sigma - \varepsilon$"-метода).

Проведен анализ сейсмических нагрузок в виде движения грунта основания и даны рекомендации по использованию упрощенных во времени синтезированных акселерограмм для прямого динамического расчета. Сформулированы количественные критерии расчетного предельного состояния (сооружения и его элементов) по несущей способности (первой группы). Рекомендуемые критерии более точно отражают состояние конструкции, чем качественные описания повреждений в СНиП-П-7-81. Рассмотрен способ спектрального анализа результатов прямых динамических расчетов на периодические нагрузки с различным периодом. Проведен спектральный анализ системы с I-ой степенью свободы с идеальной упругопластической зависимостью "усилие-прогиб", позволивший критически оценить некоторые рекомендации СНиП-П-7-81.

Рассмотрены вопросы построения динамических диаграмм $\sigma - \varepsilon$ арматуры и бетона в процессе малоцикловых нагружений. Эта проблема, имеющая принципиальное значение для использования "$\sigma - \varepsilon$"-метода, наименее изучена. Разработана реологическая модель динамического деформирования упруго-вязко-пластического материала; по результатам экспериментов определены входящие в уравнение константы материалов.

Разработаны уравнения упругопластических колебаний плоских рам. Уравнения колебаний каждого входящего в систему стержня (как системы с бесконечным числом степеней свободы) численным методом (методом прямых) преобразуются в системы уравнений, выражающих колебания конструкций, как системы с конечным числом степени свободы. При этом задача сводится к определению усилий и деформаций (перемещений) в конечном числе сечений. Усилия и деформации в сечении определяются на каждом шаге счета путем интегрирования напряжений и деформаций в конечном числе точек (волокон), в которых отслеживается динамическая зависимость $\sigma - \varepsilon$ в течение всего процесса колебаний. Сформулированы граничные условия для стержневых систем применительно к расчету рам.

Разработана программа и произведен расчет рамы разработанным методом на воздействие в виде гармонически изменяющихся ускорений грунта, вызывающая упругопластические деформации в элементах. Подобный расчет, по-видимому, проведен впервые.

I. АНАЛИЗ НАГРУЗОК ОТ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ НА ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ С УЧЕТОМ НЕУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящее время расчеты сейсмостойкости зданий и сооружений, как правило, проводятся в упругом приближении с использованием спектрального метода, в рамках которого движение разлагается по формам собственных колебаний с учетом нормируемых динамических коэффициентов.

В новой редакции СНиП 2.01.08-91 указывается на необходимость расчета зданий в неупругой стадии с использованием инструментальных записей движения основания при землетрясениях или синтезированный акселерограмм, наиболее опасных для данного здания (сооружения) и характерных для района строительства.

При этом максимальные амплитуды ускорений основания для первой расчетной ситуации (расчет на сейсмические воздействия с уровнем, характеризующим сейсмичность площадки строительства; предельное состояние ПС-II) принимаются 100,200 и 400 см/с^2 для сейсмичности площадок 7,8 и 9 баллов соответственно. Указанные расчеты необходимо выполнять для зданий с принципиально новыми конструктивными решениями, а также для зданий с системами активной сейсмозащиты.

Особенно важную роль играет учет неупругих свойств при расчете конструкций в соответствии с предельным состоянием ПС-I, когда допускаются значительные повреждения конструкций без потери общей устойчивости зданий (сооружения). При этом расчеты проводятся на действие сейсмических нагрузок, превышающих уровень, соответствующий расчетной сейсмичности площадки строительства.

В последнее время акселерограммыземлетрясений все больше используются для расчетов на сейсмостойкость. Это связано как с многообразием типов конструкций, возмодимых в сейсмических районах, так и с разнообразием воздействиий (колебаний грунтов), обусловленных сейсмогеологическими условиями района строительства.

Наиболее реальным в настоящее время является постороение расчетных акселелограмм на основе статистического анализа акселелограмм сильных колебаний грунта в данном районе.

Теоретический расчет акселелограмм на основе моделирования очага землетрясения и процессов распространения колебаний с учетом особенностей геологического строения района возможен при введении ряда упрощающих гипотез и не обеспечивает требуемую точность / I.I /.

Необходимо отметить, что, как правило, инструментальных данных для многих районов в настоящее время нет. Но и в тех случаях, когда для рассматриваемого района имеется некоторое количество записей землетрясений, вопрос о выборе расчетной акселерограммы вызывает большие затруднения.

Во-первых, большинство инструментальных записей относится к относительно слабым землетрясениям, тогда как динамические расчеты в соответствии с предельным состоянием ПС-I требуют данных о сильных землетрясениях (а в некоторых случаях и максимально возможных землетрясениях). Обработка имеющейся информации требует привлечения установленных закономерностей параметров движения грунтов от мощности землетрясения, характеристик очага землетрясения и сейсмогеологических условий района / I.I /.

В частности, имеющиеся статистические данные показывают, что спектральный состав ускорений грунта существенно зависит от магнитуды M землетрясения.

Зависимость периода T максимума спектральной кривой ускорений от магнитуды M в интервале 4 ... 8 M может быть записана в виде:

$$\lg T = 0{,}09\,M - 1{,}1\ ; \qquad \lg T = 0{,}12\,M - 1{,}2. \qquad (1.1)$$

Аналогичная зависимость для амплитуды максимума спектра имеет вид:

$$\lg \ddot{y} = 0{,}25\,M + 1{,}4\ ; \qquad \lg \ddot{y} = 0{,}25\,M + 1{,}3. \qquad (1.2)$$

В выражениях (I.I), (I.2) первая формула соответствует эпицентральной зоне, а вторая осредняет данные, полученные за ее пределами.

При построении спектров сильных землетрясений по спектрам слабых землетрясений оправдано использование зависимостей / I.I/:

$$S_{ki} = S_{k0} + \beta(f)(K_i - K_0),$$

где S_{ki} – спектральная плотность для землетрясений энергетического класса K_i ; S_{ko} – известная спектральная плотность для землетрясения энергетического класса K_0.

Энергетический класс землетрясения K связан с магнитудой, приближенной зависимостью

$$K = 4 + 1,8\, M.$$

Зависимость коэффициента β от частоты может быть представлена формулами

$$\beta = 0,63 - 0,20 \lg f, \tag{I.3}$$

$$\beta = 0,64 - 0,27 \lg f. \tag{I.4}$$

Таким образом, при оценках спектров сильных землетрясений задача сводится к возможно более точному определению исходных спектральных кривых S_{ko} для данного региона.

Сильные землетрясения имеют значительную длительность $d = (5 - 20\ с)$, которая может быть оценена по формуле /I.I/:

$$\lg d = 0,2M + 0,5 \lg L + C_1 + C_2$$

$$([d] = с; \ [L] = км)$$

Константа C_1 определяется грунтовыми условиями:

$C_1 = 0$ – средние грунты,

$C_1 = 0,15$ – рыхлые грунты,

$C_1 = -0,15$ – прочие, скальные грунты.

Константа C_2 зависит от механизма очага землетрясения и строения среды (в среднем $C_2 = -1,3$).

При использовании достаточно простых расчетных схем сооружений расчет с использованием акселерограмм на полную длительность землетрясения не вызывает трудностей. При моделировании сооружений в виде сложных пространственных систем и учете реальных неупругих свойств материалов конструкций для сокращения затрат машинного времени расчет целесообразно проводить на временной базе 2 – 3с.

Это предъявляет дополнительные требования к расчетным акселерограммам. Наряду с тем, что они должны иметь спектры реакции, соответствующие заданным, необходимо, чтобы в пределах используемого фрагмента акселерограммы было не менее 2–3 максимумов ускоре-

Фрагмент акселерограммы землетрясения в Газли

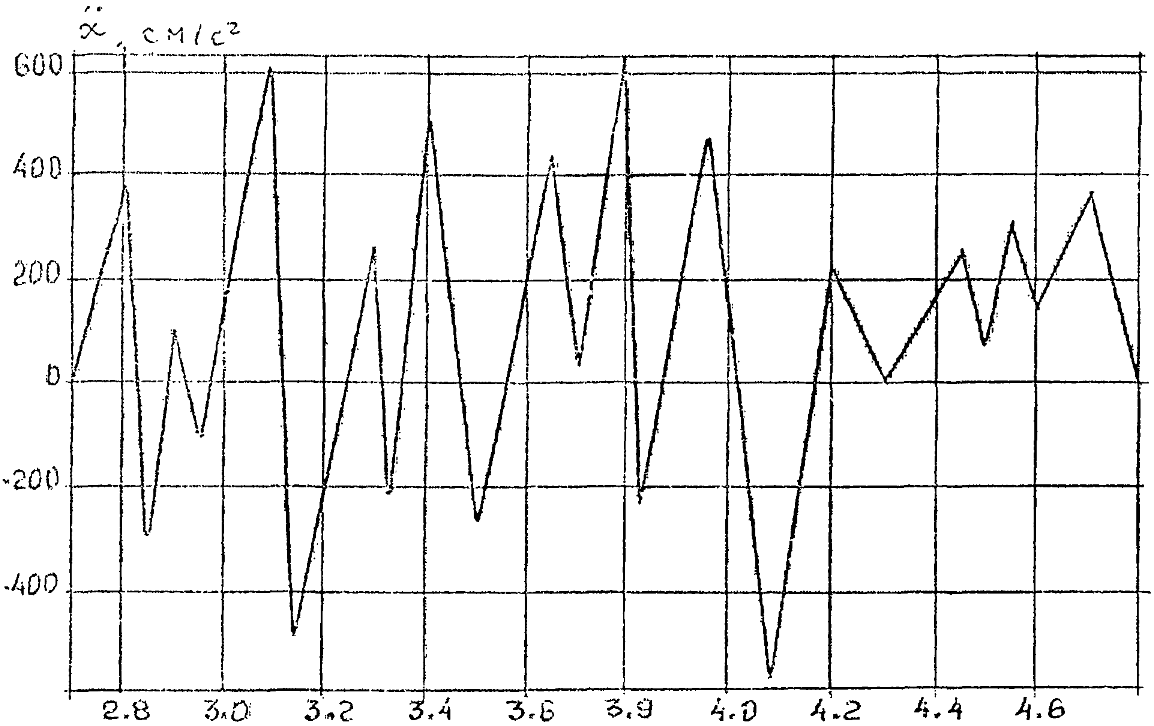


Рис. 1.1.

Фрагмент акселерограммы землетрясения в Коканде

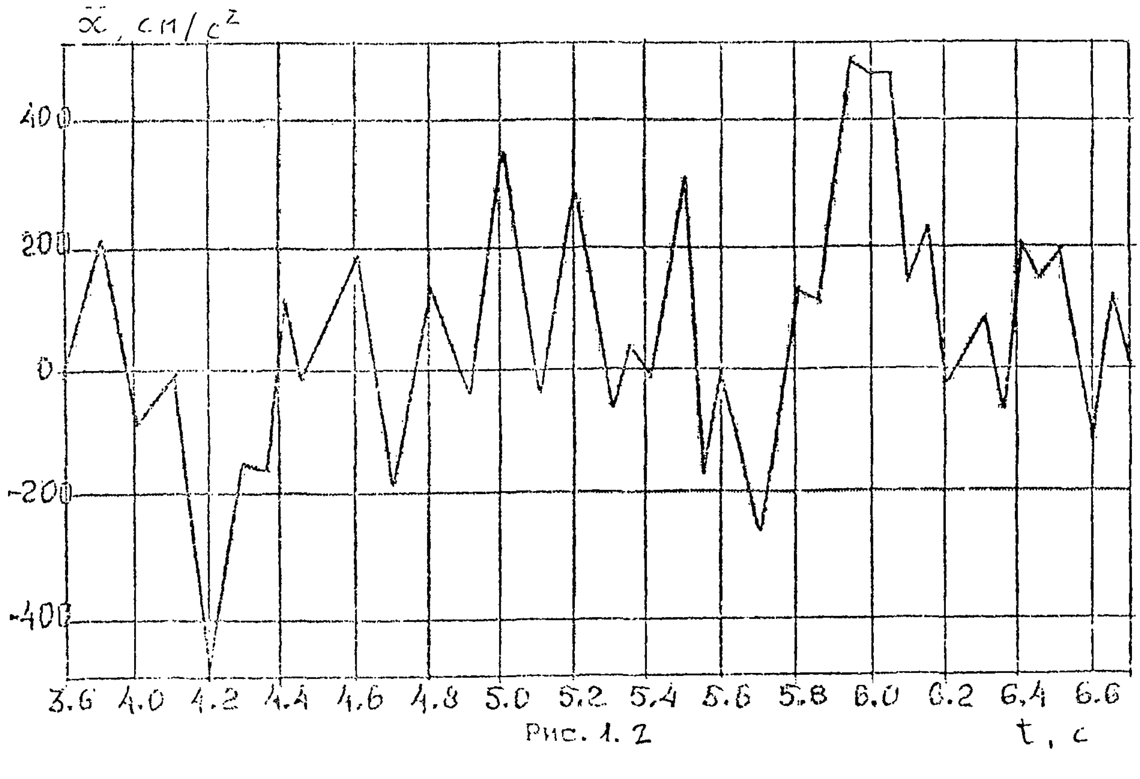


Рис. 1.2

ний, соответствующих расчетной бальности землетрясения, причем указанные пики ускорений должны быть противоположных знаков (примеры фрагментов акселерограмм приведены на рис. I.I и рис. I.2).

Учитывая, что для заданного спектра ускорений может быть построено множество расчетных акселерограмм, необходимо выполнять несколько вариантов расчета для акселерограмм, которые на основании предварительного анализа могут быть признаны наиболее опасными для сооружения.

Для исследования колебаний системы с одной степенью свободы разработан и использован метод расчета на периодически изменяющиеся ускорения грунта с заданной амплитудой и переменным периодом. Этот метод требует значительного объема предварительных вычислений и их обобщения, но обеспечивает высокую надежность результатов.

2. АНАЛИЗ МЕТОДОВ СЕЙСМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЕТОНА И АРМАТУРЫ. КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

2.I. Методы расчета конструкций с учетом упруго-пластических деформаций на особые динамические нагрузки

Динамические нагрузки большой интенсивности при взрыве, ударе, сейсмических воздействиях могут возникать ограниченное число раз и носят аварийный характер. В / I / указанные воздействия относятся к особым нагрузкам. Расчет конструкций на особые динамические нагрузки производится по предельным состояниям. При этом с учетом аварийного характера нагрузок в конструкции допускаются остаточные деформации, при достижении которых, однако, не происходит обрушения конструкций и они сохраняют необходимые эксплуатационные качества (например, возможность восстановительного ремонта после землетрясения). Остаточные деформации конструкций возникают вследствие упругопластических свойств материалов; для рассматриваемых случаев наиболее пригодны стали, имеющие выраженную площадку текучести (арматурные стали классов А-I, А-П, А-Ш). Используются два принципиально разных подхода к выбору расчетных предельных состояний. В первом случае расчет конструкций при отсутствии пластических деформаций (упругая стадия) и при их допущении (пластическая стадия) производится по первой группе предельных состояний (прекращение эксплуатации наступает вследствие исчерпания несущей способности). Методы расчета в соответствии с этим подходом разработаны достаточно полно, подкреплены необходимыми критериями, нормирующими предельные состояния, и применяются в расчетах на взрыв и удар (например, / 2 /). Другой подход, использованный в / 3 /, предусматривает расчет конструкций в упругой стадии по предельным состояниям первой группы, а в пластической стадии-второй группы. В этом случае количественные критерии предельных состояний отсутствуют, а даются качественные описания допускаемых повреждений зданий и сооружений. Первый подход имеет существенное преимущество, заключающееся в возможности использования единых количественных критериев, используемых в динамических расчетах конструкций во всех стадиях их работы. Следует отметить, что в последние годы изучается работа конструкции в стадии снижения несущей способности.

Целесообразно в сейсмостойком строительстве перейти к расчету конструкций во всех стадиях работы по предельным состояниям первой группы, что дает возможность интенсивного развития методов их расчета.

Критерии, используемые для нормирования расчетных предельных состояний первой группы, непосредственно связаны с методами динамического расчета конструкций, учитываемым числом степеней свободы и схемой нагружения (изгиб, сжатие и др.).

Например, для изгибаемых конструкций, сопротивление которых изгибу (зависимость "момент-прогиб") характеризуется диаграммой Прандтля и рассматриваемых как система с одной степенью свободы, в качестве критерия предельных состояний рассматривается отношение прогибов / 7 /.

$$K = \frac{y_{max}}{y_T} = 1;\ 2;\ 3;\ 5 \qquad (2.I)$$

При этом К = I соответствует состоянию Iа, а К > I - состоянию Iб. В (2.I) y_{max} - максимальный прогиб; y_T - прогиб, соответствующий началу текучести. Величина К назначается с учетом эксплуатационных требований.

Если учитывается несколько степеней свободы, рассматривается зависимость "момент-кривизна" (или "момент-угол поворота) и используется отношение

$$K = \frac{\varkappa_{max}}{\varkappa_T} \quad \left(\text{или} \quad K = \frac{\varphi_{max}}{\varphi_T}\right). \qquad (2.2)$$

Аналогичные критерии используются в случае упругопластической билинейной с упрочнением диаграммы сопротивления конструкции.

Изложенный подход формировался на солидной экспериментальной основе, включающей используемые в расчетах экспериментальные диаграммы сопротивления конструкций. Подобные экспериментальные зависимости при циклических (в основном квазистатических) нагружениях изучались применительно к сейсмостойким конструкциям.

В то же время, экспериментальные диаграммы сопротивления могут быть получены для ограниченного числа расчетных схем, схем нагружения. Поэтому такие диаграммы справедливы для тех напряженных состояний, материалов и конструкций, для которых получены экспериментальные данные. Расчеты, выполненные по этому методу, не дают полной картины напряженно-деформированного состояния в сечениях и остается невыясненной работа арматуры и бетона в различных стадиях работы конструкции. Эти недостатки ограничивают область применения методов расчета, основанных на экспериментальных диаграммах сопротивления. В ряде случаев имеет место механическое распространение идеальных упругопластических диаграмм на случаи, когда возможность их применения вызывает сомнение; например, до последнего времени динамические расчеты сжато-изогнутых конструкций практически во всем диапазоне соотношений между M и N выполняются по этой схеме, что не соответствует действительной работе конструкции.

Возникло новое направление, основанное на использовании в расчетах диаграмм $\sigma-\varepsilon$ материалов („$\sigma-\varepsilon$" - метод) / 5,6 /, а диаграмма сопротивления сечений и конструкций при этом определяются расчетом.

Расчеты, основанные на использовании диаграмм $\sigma-\varepsilon$ арматуры и бетона, позволяют получить полную информацию о работе любого сечения в течение всего процесса деформирования. Появилась возможность более полно учитывать предельные состояния конструкции, рассматривая в качестве дополнительных критериев предельные деформации материалов / 4,7/

$$\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_{пред}. \qquad (2.3)$$

"$\sigma-\varepsilon$" - метод оказался весьма плодотворным, позволяя решать весьма сложные задачи, применяя при этом прямые динамичесие методы. В "$\sigma-\varepsilon$" - методе работа сечения определяется в заданном количестве точек (слоев), в каждой из которых отслеживаются зависимость $\sigma-\varepsilon$ в течение всего процесса; "$\sigma-\varepsilon$" - метод удачно сочетается с численным методом решения уравнений вдоль оси стержня. Использование "$\sigma-\varepsilon$" - метода вызвало необходимость углубленного теоретического и экспериментального изучения динамических диаграмм $\sigma-\varepsilon$ упругопластических материалов при малоцикловых нагружениях. Динамические диаграммы $\sigma-\varepsilon$ изучены достаточно подробно теоретически и экспериментально при однократных нагружениях; в расчетах на такие нагрузки расчетные динамические сопротивления определяются умножением статических сопротивлений на коэффициент динамического упрочнения, который тем больше, чем выше скорость деформирования и меньше продолжительность действия нагрузки. При малоцикловых нагружениях такой подход уже недостаточен: необходимо вычислять динамические диаграммы $\sigma^{д}-\varepsilon^{д}$ материалов в течение всего процесса колебаний. Теоретическое описание динамических диаграмм $\sigma-\varepsilon$ упругопластических материалов основывается на феноменологических моделях (дислокационная – для стали; реологическая - для бетона), хотя существуют и несколько других феноменологических теорий (волновая, гидродинамическая, упрочнения -разупрочнения, предельной скорости фронта волны разрушения, энергетическая и, наконец, кинетическая, являющейся физической теорией). Проблема определения динамических диаграмм $\sigma-\varepsilon$ чрезвычайно важна.

2.2. МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА И АРМАТУРЫ ПРИ МАЛОЦИКЛОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

2.2.I. Модель одноосного деформирования бетона

В / 8,9 / изложены результаты экспериментальных исследований по определению механических характеристик бетона с учетом его работы в стадии разрушения при однократном динамическом нагружении. В / I0 / представлены результаты экспериментальных исследований бетона при малоцикловых динамических нагрузках. Показано, что в этих условиях имеет место ряд особенностей приводящих к необходимости существенного усовершенствования модели / 9 / применительно к малоцикловому динамическому нагружению. Основные положения модели такого типа, сформулированные с учетом результатов экспериментов, рассматривались в / II /. Ниже дается полная формулировка системы уравнений, позволяющих описывать процесс деформирования и разрушения бетона при малоцикловом динамическом нагружении. Приводятся результаты сопоставления расчетов по предлагаемой модели с результатами соответствующих экспериментов, описанных ранее в /I0/. При формулировке закона одноосного деформирования бетона при сжатии предполагается, как обычно в теории пластического течения /I2,I3/, что скорость деформации $\dot{\varepsilon}_1$ складывается из упругой $\dot{\varepsilon}_1^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_1^p$ составляющих

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_1^e + \dot{\varepsilon}_1^p ; \qquad (2.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_1^e = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

где E - модуль, характеризующий сжимаемость среды при мгновенном нагружении ($\dot{\varepsilon} = \infty$).

Скорость пластических деформаций принимается аналогично /7 ÷ 9/

$$\dot{\varepsilon}_1^p = q(\sigma_1 - \bar{f}), \qquad (2.4а)$$

где $\bar{f}$ - статическая диаграмма одноосного сжатия материала;

$$q_1 > 0 \text{ при } \sigma_1 > \bar{f}; \quad q \equiv 0 \text{ при } \sigma_1 \le \bar{f}.$$

Объединяя (2.4) , (2.4а), получим закон деформирования в следующем виде

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + q(\sigma_1 - \bar{f}) \qquad (2.4б)$$

При $E = const$ и $\bar{f}$ в виде монотонной функции закон такого рода использовался ранее в / I4 - I6/ для описания деформирования металла. При $E = E(\varepsilon_1)$ и функции $\bar{f}$, изменяющейся при нагружении и разгрузке, аналогичный закон использовался для описания деформирования нескальных грунтов в /17/. Обоснование применимости закона (2.4б) для описания деформирования и разрушения бетона при одноосном сжатии дано в /2.9/.

Применительно к циклическому нагружению имеют место ряд особенностей в определении функций E и $q(\sigma_1 - \bar{f})$, которые рассматриваются ниже.

Прежде всего, при циклическом нагружении статическая диаграмма сжатия $\bar{f}$ имеет различные ветви при нагружении и при разгрузке как при однократном, так и при повторных воздействиях (рис. 2.1)

$$\bar{f} = \begin{cases} \bar{f}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}), & \sigma_1 \geq \bar{f}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) \\ \bar{f}_1(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}), & \sigma_1 < \bar{f}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\bar{f}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) = \begin{cases} \bar{f}_0(\varepsilon_1), & \varepsilon_1 > \varepsilon^o_{1**} \\ \bar{f}_0(\varepsilon_1, \varepsilon^o_\varepsilon), & \varepsilon_1 \leq \varepsilon^o_{1**} \end{cases} \qquad (2.6)$$

ε_{1*} – деформация, соответствующая началу разгрузки, определяемому условием $\sigma_1 = f(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*})|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_{1*}}$;

$\varepsilon^o_1 \equiv \varepsilon^o_1(\varepsilon_{1*})$ – остаточная деформация (при $\sigma_1 = 0$);

ε^o_{1**} – деформация, при которой выполняется условие $f(\varepsilon'_1) = f_2(\varepsilon_1, \varepsilon^o_1)$ при повторном нагружении (при первом нагружении $\varepsilon^o_{1**} = 0$).

Функция $E \equiv E(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*})$, характеризующая сжимаемость бетона при мгновенном нагружении, определяется соотношением

$$E = \begin{cases} E(\varepsilon_1), & \sigma_1 > f(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) \\ f'_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}), & \sigma_1 \leq f(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$f'_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*}) = \frac{\partial f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*})}{\partial \varepsilon_1};$$

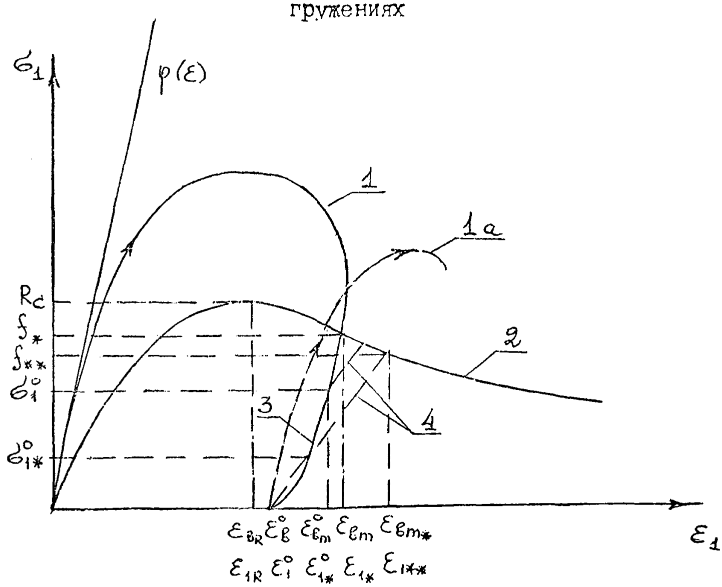
E определяет предельную динамическую диаграмму сжатия, не зависящую от количества циклов нагружения и скорости деформирования

$$\varphi(\varepsilon_1) = \int_0^{\varepsilon_1} E(\xi)\, d\xi; \qquad \dot{\varepsilon}_1 = \infty. \qquad (2.8)$$

Механические характеристики бетона, определяющие его деформирование при статическом нагружении, выражаются соотношениями / 8,9/

$$f(\varepsilon_1) = \begin{cases} R_c\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1R}}\right)^n\right], & 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{1R} \\ R_c\left[(\varepsilon_1/\varepsilon_{1R}) \cdot e^{-(\varepsilon_1/\varepsilon_{1R} - 1)}\right]^d; & \varepsilon_1 > \varepsilon_{1R}, \end{cases} \qquad (2.9)$$

Диаграммы и кривые $\sigma_1(\varepsilon_1)$ деформирования бетона при статическом и динамическом нагружениях



I,Ia – кривые $\sigma_1(\varepsilon_1)$ при некотором произвольном режиме деформирования / I– первое нагружение, Ia– повторное нагружение/ ;

2 – статическая диаграмма сжатия при однократном нагружении $f_0(\varepsilon_1)$ и при повторном нагружении при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{1**}$;

3 – статическая диаграмма сжатия при разгрузке $f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_{1*})$;

4 – статическая диаграмма сжатия при повторном нагружении $f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2^o)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon^o_{1**}$

Рис. 2.I

где деформации ε_{1R}, соответствующие статической прочности и коэффициенты n и α определяются в зависимости от прочности R_c (R_c в МПа)

$$\varepsilon_{1R} = (1,98 + 0,54 R_c)\cdot 10^{-5}, \tag{2.10}$$

$$n = 9,31 R_c^{-0,484}, \quad \alpha = 9,11\cdot 10^{-5} R_c^{1,69}, \tag{2.11}$$

$$f_1(\varepsilon_1\, \varepsilon_{1*}) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{\circ})\left[K_* + \left(\frac{f_*}{\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1^{\circ}} - K_*\right)\varepsilon^{-\alpha f(\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1)}\right]$$

где $f_* = f(\varepsilon_1\, \varepsilon_{1*})|_{\varepsilon = \varepsilon_{1*}}$, K_* - модуль упругости при разгрузке в точке $\sigma_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{\circ}$, равный

$$K_* = 0,11 E_0 \varepsilon^{-0,834 \varepsilon_1^{\circ}/\varepsilon_{1R}}; \tag{2.12}$$

E_0 - начальный модуль упругости бетона при мгновенном нагружении, равный

$$E_0 = 2,72\cdot 10^{-4} + 373 R_c, \quad \text{МПа} \tag{2.13}$$

$$f_2(\varepsilon_1\, \varepsilon_1^{\circ}) = \sigma_1^{\circ} + K_{**}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1*}^{\circ}), \tag{2.14}$$

$\sigma_1^{\circ}, \varepsilon_{1*}^{\circ}$ - напряжение и деформация, достигнутые при разгрузке;

K_{**} - модуль деформаций бетона при повторном статическом нагружении, равный

$$K_{**} = \begin{cases} \dfrac{f_{**}}{\varepsilon_{1**} - \varepsilon_1^{\circ}}, & \sigma_1^{\circ} \geq \sigma_{1*}^{\circ} \\ \dfrac{f_{**}' - \sigma_1^{\circ}}{\varepsilon_{1**} - \varepsilon_{1*}^{\circ}}; & \sigma_1^{\circ} < \sigma_{1*}^{\circ}, \end{cases}$$

где
$$f_{**} = f(\varepsilon_1\, \varepsilon_{1*})|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_{1**}}$$

σ_{1*}° - величина напряжений, определяемая из условия

$$f_1(\varepsilon_1\, \varepsilon_{1*}) = f_2(\varepsilon_1\, \varepsilon_1^{\circ})$$

$\varepsilon_1^{\circ}, \varepsilon_{1**}$ - величины деформаций (рис.2.I), определяемые из соотношений

$$\frac{\varepsilon_1^{\circ}}{\varepsilon_{1R}} = 0,272\left(\frac{\varepsilon_{1*}}{\varepsilon_{1R}}\right)^{1,826}, \quad \frac{\varepsilon_{1**}}{\varepsilon_{1R}} = 1,115\frac{\varepsilon_{1*}}{\varepsilon_{1R}}; \tag{2.15}$$

α_f - коэффициент, определяемый из условия непрерывности и гладкости кривой (2.II) в точке $\sigma_1 = f(\varepsilon_1\, \varepsilon_{1*})$ и равный

$$d_f = \frac{(\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1^0)E_* - f_*}{f_* - K_*(\varepsilon_{1*} - \varepsilon_1^0)} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{1*} - \varepsilon^0}, \quad E_* = \varphi'(\varepsilon_1)\Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_{1*}}. \quad (2.16)$$

Механические характеристики бетона, определяющие его деформирование при динамическом нагружении, выражаются соотношениями:

$$E(\varepsilon) = \begin{cases} 1{,}08\,E_o\left[1 - 0{,}074\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1E}}\right)^2\right], & 0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_{1E} \\ 1{,}08\,E_o\left[1 - m\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{1E}} - 1\right)^{1,5}\right], & \varepsilon_1 > \varepsilon_{1E} \end{cases} \quad (2.17)$$

где $E_o \equiv E_o(R_c)$ определяется согласно (2,13);

ε_{1E}, m – деформация, соответствующая началу микротрещинообразования, и экспериментальный коэффициент, равные

$$\varepsilon_{1E} = 0{,}616\left(1 + 1{,}83 \cdot 10^{-3} R_o\right)\varepsilon_{1R}, \quad (2.18)$$

$$m = 1{,}79 \cdot 10^{-3} R_c;$$

$$q = \left[\eta\,\frac{\sigma_1 - \bar{f}}{\bar{f}}\right]^{\varkappa} \quad (2.19)$$

$\varkappa$ = 4 и не зависит от прочности бетона,

η – коэффициент вязкости, зависящий от прочности R_c, деформативности ε_{1R} бетона и равный

$$\eta = \begin{cases} \eta_o(R_c), & 0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_{1R} \\ \eta_o(R_c)\,e^{\beta(R_c)(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_{1R})}, & \varepsilon_1 > \varepsilon_{1R} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\eta_o = 2{,}31\,R_c^{0,11}\ (c^{1/4});\quad \beta = 0{,}0584(R_c - 10{,}5),\ R_c > 10{,}5.$$

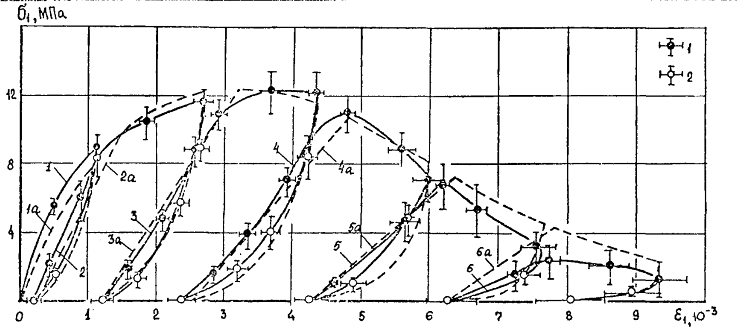
При растяжении механические характеристики определяются указанными выше соотношениями, где вместо прочности при сжатии R_c и деформации ε_{1R} подставляются соответствующие величины прочности R_p и деформаций $\varepsilon_{1R}^p = 0{,}05\,\varepsilon_{1R}$ при растяжении.

Предельно допустимые деформации бетона на нисходящей ветви при сжатии $[\varepsilon_1]$ определяются в зависимости от прочности по формуле

$$[\varepsilon_1] = \left(\frac{30{,}0}{R_c} + 1{,}05\right)\varepsilon_{e,R} \quad (2.21)$$

На рис. 2.2., 2.3. приводится сопоставление результатов расчетов (кривые Iа ÷ 6а) согласно приведенным выше соотношениям модели бетона применительно к результатам экспериментов (кривые I ÷ 6) при шестикратном статическом (рис.2.2) и динамическом (рис. 2.3) нагружении бетона с R_c = I2,4 МПа / I0 /.

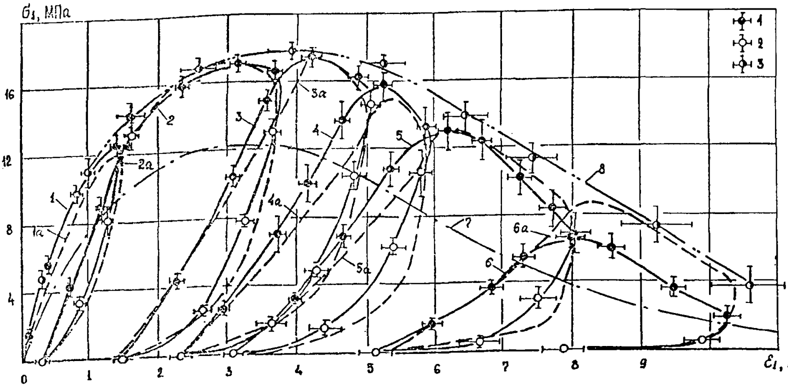
Сравнение расчетных (Iа-6а) и экспериментальных (I-6) кривых $\sigma_1(\varepsilon_1)$ при статическом циклическом нагружении бетона $R_s = 12$ МПа



номера кривых совпадают с порядковыми номерами циклов нагрузка-разгрузка; точки - экспериментальные значения: I - нагрузка, 2 - разгрузка

Рис.2.2

Сравнение расчетных (Iа-6а) и экспериментальных кривых $\sigma_1(\varepsilon_1)$ при динамическом циклическом нагружении для бетона с $R = 12$ МПа



номера кривых совпадают с порядковыми номерами циклов нагрузка-разгрузка: кривые 7,8 соответствуют однократному нагружению: 7 - расчету статической диаграммы $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$, 8 - экспериментальным данным динамических испытаний: точки I,2,3 - экспериментальные значения при циклическом (I - нагрузка, 2 - разгрузка) и однократном (3) динамических нагружениях

Рис.2.3

Здесь точки I ÷ 3 - экспериментальные данные, соответствующие средним значениям по результатам серии испытаний с соответствующими доверительными интервалами, определенными с надежностью 0.95. Пунктирные линии - результаты расчетов согласно модели при задании в качестве исходных данных результатов измерений средних значений деформаций $\langle \varepsilon(\tau) \rangle$ в каждом из циклов.

Видно, что результаты расчетов как для статического циклического нагружения, так и для динамического достаточно хорошо согласуются с результатами экспериментов. В частности, расчетные кривые $\sigma_1(\varepsilon_1)$ для пяти циклов нагружения лежат в пределах доверительных интервалов для экспериментальных точек. Для шестого цикла при динамическом нагружении расчетная кривая выходит за пределы доверительных интервалов для экспериментов. Этот цикл, однако, соответствует практически стадии полного разрушения образца.

2.2.2. Модели деформирования и механические характеристики арматуры

2.2.2.I. Модели деформирования арматуры

При расчете железобетонных конструкций на действие динамических нагрузок используются два подхода к выбору моделей деформирования арматуры.

Первый подход основан на введении так называемого коэффициента динамического упрочнения материала k_d^a по отношению к статической диаграмме упруго-пластического деформирования арматуры при растяжении (сжатии), которую представляют в виде соотношений (рис. 2.4).

$$\sigma_a = \begin{cases} E_a \varepsilon_a , & 0 \le \varepsilon_a \le \varepsilon_{aT} ;\ \dfrac{\partial \sigma_a}{\partial t} > 0 ; \\ \sigma_{aT} + E_a' (\varepsilon_a - \varepsilon_{aT}) , & \varepsilon_a > \varepsilon_{aT} ,\ \dfrac{\partial \sigma_a}{\partial t} > 0 ; \\ \sigma_a^* - E_a' (\varepsilon_a^* - \varepsilon_a) , & \varepsilon_a^* - \varepsilon_a \le \varepsilon_{aT} ,\ \dfrac{\partial |\sigma_a|}{\partial t} < 0 ; \\ -\sigma_{aT} + E_a' (\varepsilon_a + \varepsilon_{aT}) , & \varepsilon_a^* - \varepsilon_a > \varepsilon_{aT} ,\ \dfrac{\partial |\sigma_a|}{\partial t} < 0 ; \end{cases} \tag{2.22}$$

Диаграммы статического деформирования арматуры

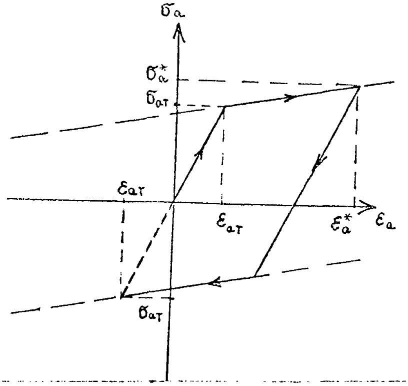


Рис.2.4

Диаграмма динамического деформирования арматуры при $\dot{\varepsilon}_a = const$

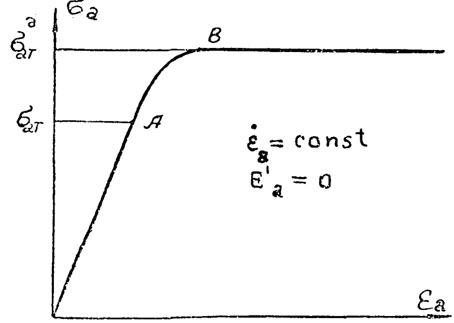


Рис.2.5

Динамическое упрочнение арматуры

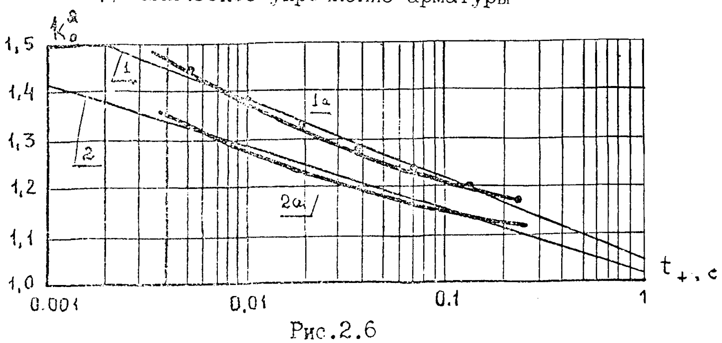


Рис.2.6

где σ_{aT} – величина предела текучести арматуры при статическом нагружении;

E_a – модуль упругости (модуль Юнга) арматуры;

ε_{aT} – деформация, соответствующая пределу текучести арматуры;

$\sigma_a^*, \varepsilon_a^*$ – максимальные значения напряжений и деформаций, достигнутые при нагружении;

E_a' – модуль пластического деформирования арматуры.

При превышении предела деформаций разрыва $\varepsilon_a > \varepsilon_a^*$ напряжение в арматуре принимается равным нулю $\sigma_a = 0$.

При динамическом нагружении предполагается, что модули упругости E_o, E_a' не изменяются, а динамический предел текучести определяется соотношением

$$\sigma_{aT}^o = \sigma_{aT} \cdot K_d^a(\dot{\varepsilon}), \qquad (2.23)$$

где зависимость $K_d^a(\dot{\varepsilon})$ определяется экспериментально.

Напряжения в арматуре затем определяются согласно (2.22), где вместо значений напряжений σ_{aT} и σ_a^* подставляются соответствующие динамические напряжения, определяемые соотношением (2.23). Указанный подход используется в тех случаях, когда в течение процесса деформирования конструкций скорость деформирования арматуры $\dot{\varepsilon}_a$ изменяется сравнительно мало и с достаточной точностью можно принимать $\dot{\varepsilon}_a \cong const$.

В общем случае для описания деформирования арматуры необходимо сформулировать, как и в случае бетона, модель деформирования, учитывающую влияния на напряженно-деформированное состояние скорости деформирования в течение всего процесса нагружения.

Рассматриваемые ниже соотношения отличаются от предложенных в указанных выше работах. Они построены на предположении о неизотропности кинематического упрочнения, что позволяет описать эффект Баушингера.

Скорость деформирования арматуры $\dot{\varepsilon}_a$ представляется, как и ранее для бетона, в виде суммы упругой $\dot{\varepsilon}_a^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_a^p$ составляющих

$$\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_a^e + \dot{\varepsilon}_a^p \qquad (2.24)$$

$$\dot{\varepsilon}_a^p = q(\sigma_a, \varepsilon_a), \quad q = \gamma_a F_a^{\delta_a} \frac{2(\sigma_a - \varkappa \dot{\varepsilon}_a^p)}{\sigma_{aT}}, \tag{2.25}$$

где F_a - статическое условие текучести

$$F_a = \frac{(\sigma_a - \varkappa_a \varepsilon_a^p)^2}{\sigma_{aT}^2} - 1, \tag{2.26}$$

где $\varkappa_a$ - параметр кинематического упрочнения, равный

$$\varkappa_a = \frac{E_a \cdot E_a'}{E_a - E_a'}; \tag{2.27}$$

E_a' - в общем случае касательный модуль при пластическом деформировании с упрочнением;

γ_a, δ_a - параметры модели, определяемые экспериментально.

2.2.2.2. Механические характеристики арматурных сталей

Обработка имеющихся в литературе / I2,I7 / экспериментальных данных по динамическому деформированию арматурных сталей в рамках приведенных в п.2.2.I. математических моделей позволяет определить необходимые для расчетов механические характеристики основных арматурных сталей.

Механические характеристики основных арматурных сталей при статических нагрузках представлены в таблице 2.I.

При использовании соотношений (2.22; 2.23) при динамических расчетах коэффициент динамического упрочнения определяется по формуле

$$K_d^a = 1 + \frac{1}{\eta} \dot{\varepsilon}^{1/\varkappa}, \tag{2.28}$$

где $\varkappa$, η - экспериментальные коэффициенты, равные для различных классов арматуры при $10^{-3} \leq \dot{\varepsilon} < 10$

A-I, A-II $\quad \varkappa = 5,0; \quad \eta = 1,95/c^{1/\varkappa};$

A-III $\quad \varkappa = 4,0; \quad \eta = 2,751/c^{1/\varkappa};$

При возникновении пластических деформаций арматуры необходимо исключить возможность ее разрыва в расчетных сечениях, определяемого условием

$$\varepsilon_a < 0,6\, \varepsilon_{a*},$$

где ε_{a*} – деформация арматуры при разрыве (табл.2.I).

На рис. 2.5. показан вид зависимости, получаемый в соответствии с (2.24) ÷ (2.27) при динамическом нагружении арматуры без упрочнения ($E_a^{\prime}$ = 0) с постоянной скоростью деформаций $\dot{\varepsilon}_a = const$. Видно, что после превышения напряжениями статического предела текучести зависимость $\sigma_a(\varepsilon_a)$ перестает быть линейной, что говорит о появлении пластических деформаций. С увеличением σ_a скорость деформаций $\dot{\varepsilon}_a^p$ резко возрастает и при $\sigma_a => \sigma_{aт}^{д}$ $\dot{\varepsilon}_a^p => \dot{\varepsilon}_a$.

Таблица 2.I

№№ пп	Класс арматуры	Диаметр (мм)	Нормативные значения, МПа		Модуль упругости $E_a \cdot 10^{-4}$ МПа	Относительное удлин. при разрыве
			Предел текучести	Времен. сопр.		
I	A-I	6-40	235	373	2I	0,25
2	A-II	I0-80	294	490	2I	0,I9
3	A-III	6-40	392	590	20	0,I4
4	A-Шa	I0-22	440	590	I9	0,I4
5	A-IУ	20-22	590	883	I9	0,06
6	A-У	I0-32	765	I030	I9	0,07
7	A-IУc	I0-28	590	834	I9	0,09

В дальнейшем время достижения динамического предела текучести $\sigma_{aт}^{д}$ будем считать временем нагружения арматуры.

Получим оценку для параметров γ_a, δ_a при предположении, что имеется экспериментально полученная зависимость, связывающая скорость деформаций и коэффицент динамического упрочнения арматуры

$$<\dot{\varepsilon}_a> = f_a\left(K_d^a\right). \qquad (2.29)$$

Примем, что в условиях деформирования арматуры при $\dot{\varepsilon}_a = const$ после достижения динамического предела текучести выполняются следующие приближенные зависимости:

$$\sigma_a = \sigma_{aT}^{\partial} + E_a' \dot{\varepsilon}_a t_T ,$$

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{E_a'}{E_a} \varepsilon_a ; \qquad \dot{\varepsilon}_a^P = \frac{E_a - E_a'}{E_a} \dot{\varepsilon}_a , \tag{2.30}$$

где t_T - время, отсчитываемое от момента достижения σ_{aT}

Подставляя (2.30) в (2,25), (2.26), получим:

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{2 E_a \gamma_a}{E_a - E_a'} \left[\left(K_d^a \right)^2 - 1 \right]^{\delta_a} K_d^a \tag{2.31}$$

С целью получения соотношений для определения γ_a и δ_a потребуем выполнения следующего условия:

$$I_a = \int_{K_1}^{K_2} \left(\lg \dot{\varepsilon}_a - \lg \langle \dot{\varepsilon}_a \rangle \right) d K_d^a = min , \tag{2.32}$$

где K_1, K_2 - величины, определяющие интервал измерения, в пределах которого необходимо обеспечить согласование теоретических и экспериментальных данных.

Логарифмируя выражение (2.31), получим

$$\lg \varepsilon_a = \gamma_* + \delta_a \lg \left[\left(K_d^a \right)^2 - 1 \right] + \lg K_d^a , \tag{2.33}$$

где введено обозначение

$$\gamma_* = \lg \frac{2 E_a \gamma_a}{E_a - E_a'} . \tag{2.34}$$

Для выполнения условия (2.32) потребуем равенства нулю частных производных $\partial I_a / \partial \gamma_*$ и $\partial I_a / \partial \delta_a$, в результате чего получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} \gamma_* &= b_1 , \\ a_{21} + a_{22} \gamma_* &= b_2 , \end{aligned} \tag{2.35}$$

коэффициенты которых определяются по формулам:

$$a_{11} = \int_{K_1}^{K_2} \lg^2 (K^2 - 1) dK ,$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_{K_1}^{K_2} \lg^2 (K^2 - 1) dK ,$$

$$a_{22} = K_2 - K_1 \,,$$
$$b_1 = \int_{K_1}^{K_2} \left(\lg f_a(K) \lg(K^2-1) - \lg(K^2-1) \lg K \right) dK \,, \qquad (2.36)$$
$$b_2 = \int_{K_1}^{K_2} \left(\lg f_a(K) - \lg K \right) dK \,.$$

Решая систему уравнений (2.35) и находя γ_s по формуле

$$\gamma_s = \frac{10^{\gamma_*}(E_a - E'_a)}{2E_a} \,, \qquad (2.37)$$

тем самым получим оценки для γ_a, δ_a, обеспечивающие соответствие теоретических результатов экспериментальным.

На рис. 2.6 приведены зависимости коэффициентов динамического упрочнения от времени нагружения, являющихся обобщением результатов экспериментальных исследований динамического деформирования арматурных сталей классов А-П, А-Ш (кривые I,2). Воспользуемся указанными зависимостями для оценки параметров γ_a, δ_a. При этом ограничимся диапазоном изменения времени нагружения t_T от 0,005 с до 0,2 с. Зависимости (кривые 1,2) в указанном диапазоне t_T, имеют вид:

$$k_d^a = 1{,}05 - 0{,}168 \lg t_T \,, \qquad (\text{А-I , А-П})$$
$$k_d^a = 1{,}02 - 0{,}134 \lg t_T \,, \qquad (\text{А-Ш}) \qquad (2.38)$$

Анализ характера деформирования арматуры, описываемого предлагаемыми соотношениями (2.22) ÷ (2.27), показал, что при $\dot{\varepsilon}_a = const$ и $t_T \in [5\ \text{МС}, 200\ \text{МС}]$ время достижения напряжения, равного σ^{∂}_{aT}, может быть оценено по формуле

$$t_T = 1{,}1 \frac{\sigma_T k_d^a}{E_a \dot{\varepsilon}_a} \qquad (2.39)$$

Использование формул (2.38), (2,39) позволяет получить зависимости, связывающие скорости деформации и K_d^a,

$$\lg \dot{\varepsilon}_{a\partial} = \frac{k_d^a - 1{,}05}{0{,}168} + \lg \frac{1{,}1\sigma_{aT} k_d^a}{E_a} \quad \text{- арматура А-I, А-П,} \qquad (2.40)$$
$$\lg \dot{\varepsilon}_{a\partial} = \frac{k_d^a - 1{,}02}{0{,}134} + \lg \frac{1{,}1\sigma_{aT} k_d^a}{E_a} \quad \text{- арматура А-Ш .}$$

Используя соотношения (2.40) в качестве обобщенных экспериментальных данных, можно по формулам (2.36) вычислить коэффициенты уравнений (2.35) и получить оценки для параметров γ_a, δ_a. Указанные вычисления были выполнены с использованием ЭВМ. Вычисление интегралов осуществлено методом трапеций. В результате получены следующие данные:

арматура класса А-I γ_a = 0,0932 1/С δ_a = 3,653;
арматура класса А-П γ_a = 0,1165 1/С δ_a = 3,653;
арматура класса А-Ш γ_a = 0,5047 1/С δ_a = 3,537

На рис. 2.6 приведены для сравнения исходные экспериментальные зависимости для $k_д^a$ (кривые 1,2) и результаты расчетов для арматурной стали классов А-П (кривая 1а), А-Ш (кривая 2а). Кривые 1а, 2а соответствуют результатам расчетов с использованием приближенных соотношений (2.30), (2.39). Точками показаны результаты численного моделирования динамического деформирования арматуры, описываемого соотношениями (2.24) ÷ (2.27), при $\dot{\varepsilon}_a = const$

Сопоставление представленных на рис. 2.6 результатов позволяет сделать следующие выводы:

- предложенный подход для оценки констант модели имеет достаточную для практики точность;

- разработанная модель динамического деформирования арматурных сталей в широком диапазоне изменения времени нагружения согласуется по $k_д^a$ с экспериментальными данными.

С целью иллюстрации свойств модели на рис. 2.7 показаны траектории нагружения стали класса А-П для $\dot{\varepsilon}_a = const$ и $\varepsilon_a = 0{,}005$.

Анализ соотношений, описывающий динамическое деформирование арматуры, показывает, что в случае, когда $\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_a(t)$ является непрерывной, функция $\dot{\sigma}_a = \dot{\sigma}_a(t)$ также непрерывна. Вследствие этого траектории нагружения на плоскости не имеют точек излома. Это обстоятельство способствует лучшей устойчивости вычислительного процесса при использовании численных методов МКР или МКЭ, и является достоинством модели.

2.3. Количественные критерии расчетного предельного состояния по несущей способности

В [3] предусматриваются два уровня допустимых повреждений, дается их качественное описание и для каждого уровня вводятся ко-

Траектории динамического нагружения арматуры

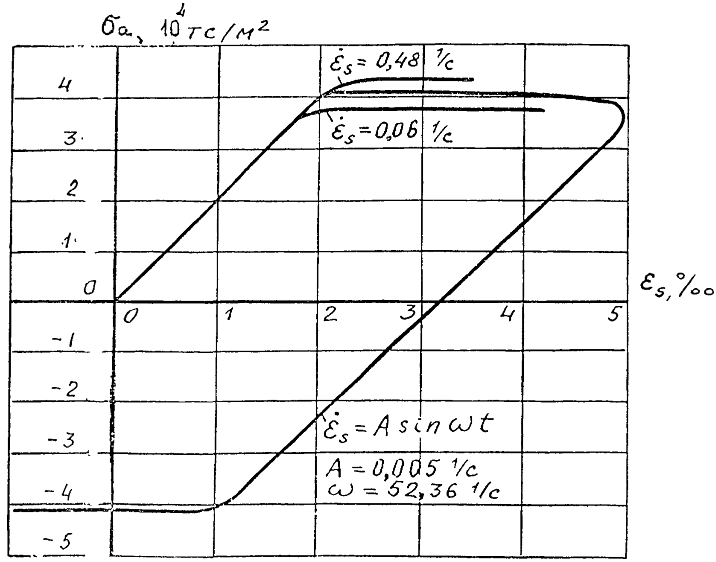


Рис.2.7

эффициенты, понижающие коэффициенты динамичности, вычисленные для упругой системы (в 4 и 8 раз).

Следует отметить, что железобетонные каркасные здания и сооружения являются наименее сейсмостойкими. В их конструкциях возникают следующие характерные повреждения, во многих случаях приводящие к обрушению:

- раскрытие сквозных нормальных и наклонных трещин; наклонные трещины часто образуются в средней трети наружных и внутренних колонн и характеризуются сдвигом частей элемента вдоль берегов трещины;
- раздробление сжатого бетона наружных и внутренних колонн, особенно бетона замоноличивания стыков сборных конструкций;
- потеря устойчивости сжатой арматуры с ее отрывом от хомутов и выпучиванием за грань элемента, сопровождающимся отслоением защитного слоя;
- разрыв поперечной арматуры или ее отрыв от продольных стержней в местах сварки;
- продергивание продольной растянутой арматуры с нарушением анкеровки или ее разрыв;
- выдергивание из бетона закладных деталей крепления стеновых панелей и др.

Перечисленными повреждениями, влияющими на общую прочность и устойчивость здания, их перечень не ограничивается [18].

Для предотвращения возникновения перечисленных повреждений или их снижения до безопасного уровня необходимо обеспечить соблюдение комплекса количественных критериев, которые дают всестороннюю оценку предельного состояния по несущей способности (первой группы) сооружения в целом и его отдельных несущих элементов. При этом чрезмерное повреждение элементов следует трактовать как чрезмерное (запредельное) развитие пластических деформаций бетона и арматуры. При умеренном (допредельном) их развитии элементы, сохраняя несущую способность, получают остаточные деформации (перемещения) и некоторые повреждения, не приводящие, однако, к обрушению элементов, фрагментов сооружения или сооружения в целом.

Указанные количественные критерии могут быть разделены на две группы: критерии, характеризующие предельное состояние сооружения в целом, и - характеризующие предельное состояние каждого несущего элемента.

Критерии предельного состояния сооружения

В процессе колебаний в зонах, где возникают пластические деформации арматуры, обычно вводятся пластические шарниры. Пластический шарнир характеризуется сохранением несущей способности при неконтролируемой возможности нарастания деформаций; то есть стадии текучести может смениться стадией снижения несущей способности и разрушения конструкции (как правило, хрупкого характера). Таким образом, с нарастанием остаточных деформаций уменьшается способность конструкции к пластическому деформированию и возрастает склонность к хрупкому разрушению. Если представить, что при определенной схеме деформирования пластические шарниры образовались во всех узлах рамы, то она превращается в мгновенно изменяемую (вырожденную) систему (в статическом смысле); аналогично при образовании пластических шарниров вверху и внизу всех стоек какого-либо яруса (этажа) образуется вырожденная система, имеющая склонность к обрушению.

Для предотвращения обрушения сооружения в целом или его частей вследствие их перехода в вырожденную пластическую систему необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$n \le 0, \qquad (2.41)$$

где n – число степеней свободы статической системы, образовавшейся путем замены пластических шарниров простыми шарнирами.

При этом $n = 0$ может быть принято для одноэтажных рам или верхних ярусов многоэтажных рам; в остальных случаях целесообразно принимать $n < 0$.

Для каркасных сооружений, рассчитываемых как консольный стержень, обладающий одной динамической степенью свободы, важным обобщенным критерием, характеризующим пластические деформации, является отношение предельного пластического прогиба к прогибу соответствующему началу текучести: $k_y = y_{пред} / y_т$

При этом максимальный прогиб конструкции не должен превышать предельный, т.е.

$$\frac{y_{max}}{y_т} \le k_y \qquad (2.42)$$

Предельное значение k_y обычно задается. С увеличением k_y ухудшаются эксиматационные качества конструкций, но обеспечивается снижение материалоемкости. Ниже показано, что заметное снижение расчетных (эквивалентных статических) нагрузок обеспечивается при $k_y \leq 4 \div 5$; при $k_y > 4$ расчетные нагрузки снижаются незначительно. На данном этапе работы с учетом повторных толчков, которые могут привести к нарастанию остаточных деформаций, рекомендуется принять предельное значение $k_y = 2 \div 3$.

Критерии предельного состояния элементов

Для обеспечения несушей способности отдельных элементов следует обеспечить выполнение следующих условий:

для изгибаемых элементов

$$\frac{\varkappa_{max}}{\varkappa_T} \leq K_\varkappa \tag{2.43}$$

или

$$\frac{\varphi_{max}}{\varphi_T} \leq K_\varphi \tag{2.43а}$$

где $\varkappa_{max}$ (φ_{max}) – максимальная кривизна (угол поворота) сечения:

$\varkappa_T$ (φ_T) – их значения, соответствующие началу текучести арматуры;

$K_\varkappa$ (K_φ) – $2 \div 3$ – предельно допустимые значения.

Для изгибаемых, внецентренно и центрально-сжатых элементов, рассчитываемых по нормальным сечениям, должны соблюдаться условия, ограничиваю ие деформации сжатого бетона, растянутой и сжатой арматуры

$$\varepsilon_{b\,max} \leq \varepsilon_{b\,пред}, \tag{2.44}$$

$$\varepsilon_{s\,max} \leq \varepsilon_{s\,пред}, \tag{2.45}$$

$$\varepsilon_{s'\,max} \leq \varepsilon_{s'\,пред}. \tag{2.46}$$

Предельная деформация сжатого бетона при работе на нисходящем участке диаграммы $\sigma - \varepsilon$ составляет приблизительно $\varepsilon_{b\,пред} \approx 1{,}4\,\varepsilon_{1R}$ (ε_{1R} – см. 2.2), при этом $\varepsilon_{b\,пред}$ соответствует уровню напряжений $\approx 0{,}85\,R_b$. Указанная величина $\varepsilon_{b\,пред}$ используется в расчетах изгибаемых элементов. Для центрального и внецентренно-сжатых элементов с малыми эксцентрисететами следует принимать $\varepsilon_{b\,пред} = \varepsilon_{1R}$. С учетом переменного характера нагружений при сейсмическом воздействии и их повторяемости целесообразно принять $\varepsilon_{b\,пред} = \varepsilon_{1R}$ для любых конструкций.

Предельная деформация растянутой рабочей арматуры может составлять $\varepsilon_{s\,пред} = 0{,}6\,\varepsilon_{a*}$, где ε_{a*} – деформация арматуры при разрыве (см.2.2.).

Предельная деформация сжатой арматуры должна ограничиваться условием недопущения потери ею устойчивости, для чего следует ограничить ее деформации деформацией текучести

$$\varepsilon_{s'\,пред} = \varepsilon_{aт}\,.$$

Приведем краткое описание критериев несущей способности элементов по сечениям, совпадающим с наклонными трещинами. Для полного их обоснования необходимо изложить новую теорию расчета железобетонных конструкций по наклонным сечениям, совпадающим с полем направлений наклонных трещин, разработанную на кафедре динамики зданий и сооружений МГСУ, что в рамках данной работы не представляется возможным. Отметим лишь, что теория согласуется с известными экспериментальными данными; она описывает возможность образования наклонных трещин не вблизи опор, а в серединной части элементов сейсмостойких конструкций.

Для обеспечения прочности элементов по наклонным сечениям необходимо обеспечить:

– условие, предотвращающее возможность разрушения бетона срезом сжатой зоны над вершиной наклонной трещины

$$\frac{Q_b}{N_b} \le \left(\frac{Q_b}{N_b}\right)_{пред} = 1{,}1\,\frac{Q}{\pi}\,, \qquad (2.47)$$

где Q_b и N_b – поперечное и сжимающее усилия в бетоне;

$\left(\frac{Q_b}{N_b}\right)_{пред} = \frac{Q_{b\,пред}}{N_{b\,пред}}$ – отношение соответствующих усилий при достижении предельного сопротивления бетоном.

При $\theta = 45^{o}$ $\left(\frac{Q_b}{N_b}\right)_{пред} = 0{,}275\,.$

– Условие, предотвращающее разрушение бетона от сжатия

$$N_b \le N_{b\,пред} \qquad (2.48)$$

– Условие прочности продольной арматуры, пересекаемой наклонной трещиной и воспринимающей усилие N_s (в упругой стадии работы арматуры)

$$A_s \cdot R_s \ge N_s\;; \qquad (2.49)$$

в случае пластических деформаций

$$\varepsilon_s \le \varepsilon_{s\,пред}\,. \qquad (2.49а)$$

Необходимо отметить, что усилия, возникающие в сжатой зоне, и усилие (деформации) в арматуре вычисляются с учетом поперечного армирования. Отметим, что в усиленном поперечном армировании нуждаются не только приопорные участки элементов (как это принято), но и пролетные участки.

В заключение отметим, что большинство приведенных количественных критериев наиболее удобно использовать в случае прямого динамического расчета сооружения численными методами. Предложенные критерии расчетного предельного состояния по несущей способности отражают повреждения конструкций. Комплексное применение этих критериев обеспечивает всестороннюю оценку состояния сооружения в целом и его отдельных элементов; этим достигается высокая надежность сооружения.

3. МЕТОД РАСЧЕТА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ КАК ПЛОСКИЕ РАМЫ

3.I. Уравнения колебаний упругопластических конструкций

3.I.I. Дифференциальные уравнения продольно-поперечных колебаний

3.I.I.I. Основные предложения

Рассматривается прямолинейный стержень конечной длины. Стержни имеют поперечные сечения произвольной формы, но симметричные относительно плоскости ХОУ (рис.3.I).

Рассматривается плоская задача, то есть считается, что все деформации происходят в плоскости ХОУ, все нагрузки (активные, реактивные, инерционные) равномерно распределены по ширине поперечного сечения и направлены параллельно плоскости ХОУ. Напряжения в любом слое равномерно распределены по ширине сечения.

Рассматриваются отдельные стержни и стержни, входящие в стержневую систему.

Нагрузка на стержень имеет нормальную к оси X и касательную составляющие и изменяется в каждой точке X во времени. На концах стержней при соответсвующих краевых условиях могут быть заданы динамические моменты, продольные и поперечные силы, а также задано движение опор стержня в продольном и поперечном направлениях (или задано движение стержневой системы).

Стержень расположен на упругом (винклеровском) основании, оказывающем сопротивление, пропорциональное перемещение каждой точки оси в поперечном и продольном направлениях. При движении каждой точки оси стержня в поперечном и продольном направлениях возникают диссипативные силы, пропорциональные скорости точки, где коэффициент пропорциональности характеризует акустическую жесткость среды.

Учитывается влияние на изгиб стержня нормальных сил, то есть геометрическая нелинейность.

Все характеристики стержня, окружающей среды и нагрузки, переменны вдоль оси X , а в некоторых случаях могут изменяться скачком.

СИСТЕМА КООРДИНАТ ЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

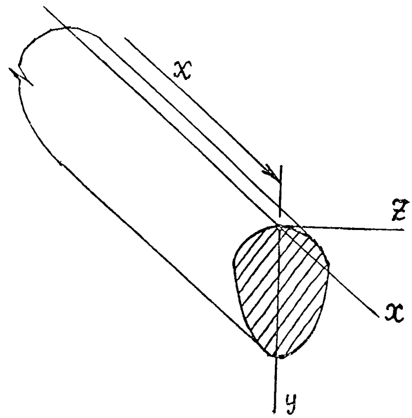


Рис.3.I

В целях возможности исследования влияния различных факторов на работу конструкции целесообразно учесть деформации поперечного сдвига и влияние сил инерции вращения. Учет этих двух факторов позволяет подойти к анализу волновых явлений в стержне.

Напряженно-деформированное состояние в сечении, зависимости между усилиями и деформациями определяются в соответствии с решениями, разработанными в 3.2.

Рассматриваются малые деформации, поэтому уравнения, написанные для недеформированного состояния, справедливы, деформированного состояния (кроме уравнений учитывающих влияние продольных сил на изгиб). Отклонения при изгибе (φ) считаются малыми, такими, что $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$.

Остальные допущения будут вводиться в процессе изложения.

3.I.I.2. Дифференциальные уравнения колебаний

Составим уравнения, выражающие условия равновесия элементарного участка dx (рис.3.2).

При действии сил, параллельных оси X, принимая, что направление положительной горизонтальной силы совпадает с направлением оси X,

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} - P_x(x,t) = 0 , \qquad (3.I)$$

где $N(x,t)$ – продольная сила;

$P_x(x,t)$ – суммарная распределенная продольная нагрузка, включающая заданную динамическую и инерционные нагрузки, а также сопротивление основания и внутреннее трение в материале конструкции, при этом :

$P_{x1}(x,t)$ – часть нагрузки, которая приложена в геометрическом центре тяжести,

$P_{x2}(x;t)$ – часть нагрузки, действующая вдоль наружной грани стержня;

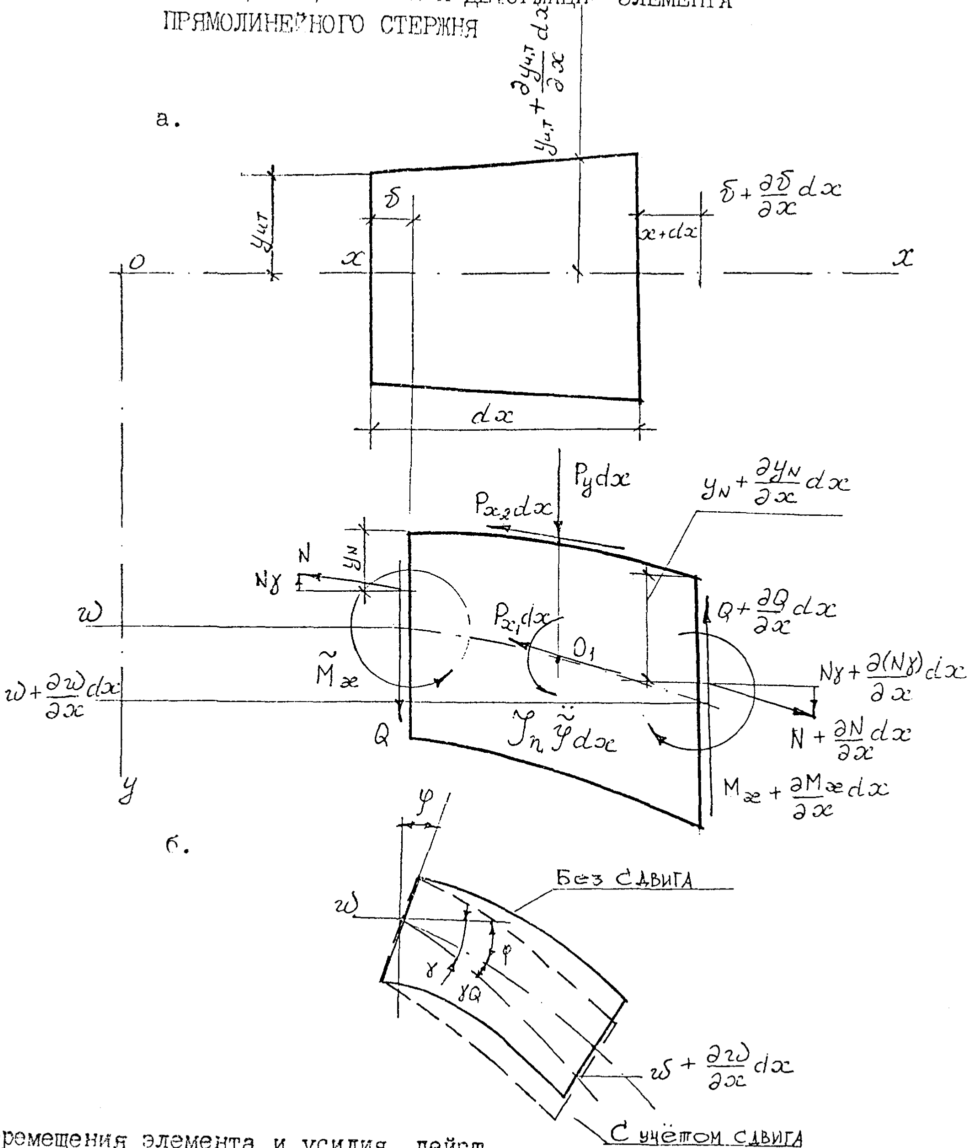
t – время.

При действии сил, параллельных оси y, примимая, что направление положительных вертикальных сил совпадает с направлением оси y :

$$P_y(x,t)\,dx - \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\cdot\gamma(x,t)\right)dx \,) = 0 ; \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\cdot\gamma(x,t)\right) - P_y(x,t) = 0$$

СХЕМА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, УСИЛИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ



а - перемещения элемента и усилия, действующие на него

б - схема изгибных деформаций с учетом сдвига

Рис.3.2

где $Q(x,t)$ – поперечная сила;

$N(x,t)$ – продольная сила;

$P_y(x,t)$ – суммарная распределенная поперечная нагрузка, включающая заданную динамическую и инерционные нагрузки, сопротивление основания и внутреннее трение в материале конструкции;

$\gamma(x,t)$ – угол поворота продольных волокон;

$\delta(x,t)$ – перемещение точки по координате y (имеет положительное значение, если происходит по направлению оси y).

Запишем уравнение равновесия при действии сил вращения (с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига) относительно точки O_1 , принимая, что положительный момент направлен по часовой стрелке,

$$-Q(x,t)\,dx - \frac{\partial M_{\varkappa}}{\partial x}dx - J_m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \gamma_Q(x,t)\right)dx -$$

$$-N(x,t)\cdot\left(y_{цт}(x) - y_N(x,t)\right) + \left(N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}dx\right)\left(y_{цт}(x) - \frac{\partial y_{цт}(x)}{\partial x}dx\right. -$$

$$\left.- y_N(x,t) - \frac{\partial y_N(x,t)}{\partial x}dx\right) - P_{x2}(x,t)\cdot y_{цт}(x)\,dx = 0.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая членами, содержащими dx^2 после сокращения на dx получаем

$$-Q(x,t) + \frac{\partial M_{\varkappa}(x,t)}{\partial x} - J_m(x)\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2} + N(x,t)\left(\frac{\partial y_{цт}(x)}{\partial x} - \frac{\partial y_N(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}\left(y_{цт}(x) - y_N(x,t)\right) - P_{x2}(x,t)\,y_{цт}(x) = 0$$

или

$$-Q(x,t) + \frac{\partial M_{\varkappa}(x,t)}{\partial x} - J_m(x)\,\ddot{\varphi}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\cdot\left(y_{цт}(x) - y_N(x,t)\right)\right) -$$

$$-P_{x2}(x,t)\,y_{цт}(x) = 0.$$

В выражении (3.3):

$M_x(x,t)$ – изгибающий момент в сечении;

$\varphi(x,t)$ – угол поворота поперечного сечения $(\varphi(x,t) = \gamma(x,t) - \gamma_Q(x,t))$, γ_Q – угол поворота волокон при поперечном сдвиге, $\gamma_Q = -\lambda Q$ (рис.3.I.б);

$y_{цт}(x)$ – расстояние от верхнего волокна до центра тяжести сечения;

$y_N(x,t)$ – расстояние от верхнего волокна до точки приложения равнодействующей продольного усилия;

$J_m(x)$ – момент инерции вращения.

Предпоследний член в уравнении (3.3) учитывает, что равнодействующая продольного усилия не совпадает с геометрическим центром тяжести, а также, что точка приложения продольного усилия и положение геометрического центра тяжести (при переменном сечении стержня) изменяются вдоль X. Продифференцируем (3.3) по X и заменим $\frac{\partial Q}{\partial X}$, используя (3.2):

$$\frac{\partial^2 M_x(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(J_m(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \lambda Q(x,t)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) + \tag{3.4}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N(x,t)(y_{цт}(x) - y_N(x,t))\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(P_{x2}(x,t)\,y_{цт}(x)\right) - P_y(x,t) = 0$$

В уравнениях:

$$P_y(x,t) = \left(-m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - C_y(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - K_y(x)\,w(x,t) + q_y(x,t)\right)\ell(x)\ ;$$

$$P_x(x,t) = \left(-m(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c_x(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - K_x(x)\,v(x,t) + q_x(x,t)\right)\ell(x)\ ;$$

$$P_{x1}(x,t) = \left(-m(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c_{x1}(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)\ell(x)\ ;$$

$$P_{x2}(x,t) = \left(-c_{x2}(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - K_x(x)\,v(x,t) + q_x(x,t)\right)\ell(x)\ .$$

В формулах (3.5):

$b(x)$ – максимальная ширина сечения;
$m(x)\cdot b(x)$ – масса, приходящаяся на единицу длины стержня;
$k_y(x)$ – коэффициент упругого отпора основания при перемещении точки по координате y ;
$k_x(x)$ – то же по координате x ;
$c_y(x)$ – обобщенный коэффициент диссипации[x)] при перемещении точки по координате y ;
$c_x(x)$ – то же по координате x ;
$q_y(x,t)$ – заданная *продольная* распределенная динамическая нагрузка;
$q_x(x,t)$ – заданная поперечная распределенная динамическая нагрузка;
$v(x,t)$ – перемещение точки по координате x (имеет положительное значение, если совпадает с направлением оси X).

Уравнения деформаций рассматриваемого элемента стержня имеет вид:

а) изменение кривизны

$$\varkappa_c(x,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\cdot Q(t)\right); \qquad (3.6)$$

б) продольная деформация

$$\varepsilon_c(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}. \qquad (3.7)$$

Изменение кривизны положительно, если происходит растяжение верхнего волокна. Продольная деформация положительна при растяжении стержня.

Получена система пяти дифференциальных уравнений в частных производных: (3.I), (3.3) и (3.4), выражающих условия равновесия, и (3.6) и (3.7) – деформаций. Уравнения (3.I), (3.3) и (3.4) служат для определения перемещений $w(x,t)$ и $v(x,t)$ и усилия $Q(x,t)$ по известным значениям $M_\varkappa(x,t)$, $N(x,t)$ и $y_N(x,t)$. Уравнения (3.6) и (3.7) служат для определения деформаций стержня $\varkappa_c(x,t)$ и $\varepsilon_c(x,t)$ через значения $w(x,t), v(x,t), Q(x,t)$. Замкнутость решения обеспечивается зависимостями $M_\varkappa(\varkappa_c)$, $N(\varepsilon_c)$

x) Обобщенный коэффициент диссипации может учитывать акустическую жесткость основания и внутреннее трение в материале.

(см. 3.2). Число уравнений соответствует числу неизвестных.

Если не учитывается инерция вращения, в уравнениях (3.3) и (3.4) исчезают члены, содержащие $J_m(x)$. Если не учитываются деформации поперечного сдвига, в уравнениях (3.3), (3.4) и (3.6) исчезают члены, содержащие $\lambda(x)$. В этом случае уравнение (3.3) выпадает из системы и является вспомогательным уравнением, служащим для определения $Q(x,t)$.

Начальные условия.

Система содержит 6-ой суммарный порядок производных по t, $\ddot{w}(x,t)$, $\ddot{v}(x,t)$, $\ddot{Q}(x,t)$. Начальные условия есть условия типа Коши

$$\left.\begin{array}{lll} w(x,0)=\alpha_1\ ; & \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0 & \quad (а)\\[2ex] v(x,0)=\alpha_2\ ; & \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0 & \quad (б)\\[2ex] \sigma_{xx}(x,y)=\alpha_3\ ; & \varepsilon_{xx}(x,y)=\alpha_4\ ; \quad E(x,y)=\alpha_5 & \quad (в)\\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon_{xx}(x,y)}{\partial t}=0\ ; & \dfrac{\partial\sigma_{xx}(x,y)}{\partial t}=0 & \quad (г) \end{array}\right\}\ t=0$$

– известные значения.

При этом известна вся предшествующая "история" процесса деформирования. Из условия (в) получаются значения всех усилий (включая $Q(x)$) при $t=0$. Если не учитывается инерция вращения или поперечный сдвиг, необходимость в условии $\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}=0$ отпадает.

Особенности граничных условий

Общее количество граничных условий должно соответствовать числу произвольных постоянных, образующихся при интегрировании системы уравнений относительно x, что в свою очередь равно порядку производных по x, содержащихся в системе. Система уравнений имеет 8-ой суммарный порядок.

Граничные условия на концах одиночных стержней обычно задаются в виде перемещений, либо в виде отвечающих им усилий, либо в виде соотношений между этими перемещениями и усилиями (по 3 условия на каждом конце стержня).

Так как в систему уравнений входит y''_N, в качестве одного из граничных условий в каждом опорном сечении должно использоваться значение y_N, которое может быть задано или вычислено по соответствующим формулам 3.2. В тех случаях, когда конструкция опорного устройства не дает возможности определить y_N в опорном сечении (например, при передаче продольной силы на часть сечения) следует, используя принцип Сен-Венана, производить определение напряженно-деформированного состояния в сечении, удаленном от опоры на расстояние $s \geqslant h/2$ (h - высота балки), и вычисленное значение $y_N(s,t)$ принять приближенно в качестве граничного условия $(y_N(s,t) \approx y(0,t))$.

Если элемент является составной частью стержневой системы, граничные условия для него выражаются в виде условий, определяющих совместную работу всех p стержней, сопрягающихся в узле. В этом случае также возможно задание значений усилий или перемещений (например, в случае, если стержень имеет шарнирное сопряжение с узлом - момент в опорном сечении равен нулю).

В узлах рам следует вводить абсолютно жесткий элемент, через который осуществляется сопряжение стержней (рис. 3.3). Помимо условий неразрывности деформаций в узле (3р - 3 условия), должны быть составлены 3 дифференциальных уравнения движения сопрягающего элемента. Напряженно-деформированное состояние и y_N в этом случае вычисляются в опорном сечении каждого стержня.

3.I.2. Решение уравнений колебаний методом прямых

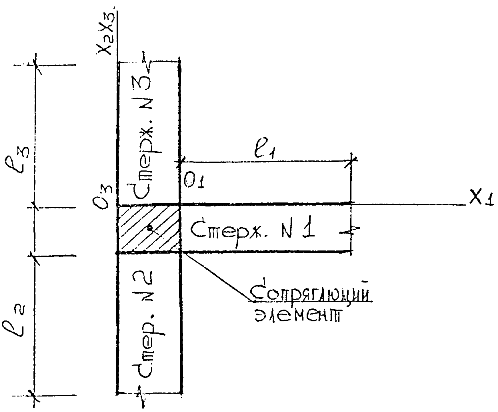
3.I.2.I. Метод решения

Необходимо решить систему дифференциальных уравнений, три из которых выражают условия равновесия, а два - условия деформаций; усилия и деформации связаны двумя зависимостями, характеризующими сопротивление сечения; уравнения удовлетворяют заданным начальным и граничным условиям.

Используется метод прямых решения дифференциальных уравнений в частных производных / I /, который можно рассматривать как предельный случай метода сеток, если, используя прямоугольную или ортогональную сетку x,t, шаг сетки по оси t устремить к нулю.

Метод прямых состоит в следующем.

СХЕМЫ СОПРЯЖЕНИЯ 3-Х И 4-Х СТЕРЖНЕЙ В УЗЛАХ РАМЫ



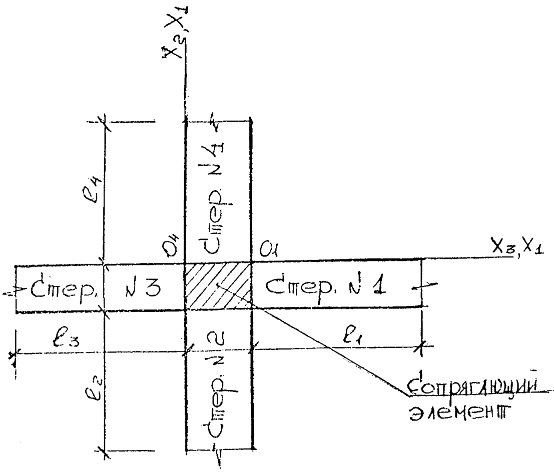


Рис3.3

На отрезке прямой (или кривой) $[x_0; x_0+\ell]$ (ℓ – длина стержня) возьмем точки $x_i = x_0 + is$ (i = 0, I, 2, ...,), $s = \ell/n$ и проведем прямые $x = x_i$. Положим в дифференциальных уравнениях $x = x_i$ и заменим производные по x конечно-разностными соотношениями. Тогда вместо каждого дифференциального уравнения движения в частных производных получаем систему $n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а вместо каждого уравнения деформаций получаем систему $n+1$ алгебраических уравнений. Таким образом, задача сводится к расчету системы с $n+1$ степенями свободы. Решив системы дифференциальных и алгебраических уравнений с учетом связывающих их зависимостей, найдем значения $M_{\varkappa i}$, N_i w_i, v_i, ε_{ci}, y_{Ni}, Q_i , аппроксимирующие точное решение задачи на прямых $x = x_i$. Замена производных по x различными разностными отношениями приводит к различным системам метода прямых, с различной точностью аппроксимирующим исходные дифференциальные отношения. Ошибка, получаемая от замены дифференциального уравнения разностным, характеризующая погрешность метода, выражается остаточным членом $O(s^k)$. Разностная схема должна быть сходящейся, устойчивой и гибкой. Для устойчивых схем порядок точности схемы совпадает с порядком аппроксимации оператора, граничных условий и правой части. Оценка практической пригодности той или иной разностной схемы производится по степени k и по коэффициенту перед этой степенью. Если решение дифференциального уравнения может иметь производные только до какого-то определенного порядка, то не имеет смысла использовать аппроксимацию более высокого порядка, так как это усложняет работу, но не улучшает результат.

Так как в уравнении входят произведения различных производных по x , необходимо получить доказательство следующего положения:

если различным дифференциальным операторам L_u и L_v поставлены на одной сетке в соответствие некоторые разностные операторы $L^{(s)}_{su}$ и $L^{(s)}_{sv}$, аппроксимирующие дифференциальные с порядком аппроксимаций соответственно s^{k_1} и s^{k_2} $(k_1 < k_2)$, то порядок аппроксимации произведения $[L^{(s')}_{su}][L^{(s)}_{sv}]$ разностных операторов есть s^{k_1}

Доказательство:

$$L_u = L^{(s)}_{su} + O(s^{k_1})$$

$$L_v = L^{(s)}_{sv} + O(s^{k_2})$$

$$
\begin{aligned}
(L_u)(L_v) &= [L_{su}^{(s)}][L_{sv}^{(s)}] + \\
&+ [L_{su}^{(s)}]\cdot O(s^{K2}) + [L_{sv}^{(s)}]\cdot O(s^{K1}) + O(s^{K1})\cdot O(s^{K2}) = \\
&= [L_{su}^{(s)}][L_{sv}^{(s)}] + [L_u - O(s^{K1})]\cdot O(s^{K2}) + \\
&+ [L_v - O(s^{K2})]\cdot O(s^{K1}) + O(s^{K1})\cdot O(s^{K2}) = \\
&= [L_{su}^{(s)}][L_{sv}^{(s)}] + (L_u)\cdot O(s^{K2}) + (L_v)\cdot O(s^{K1}) - O(s^{K1})\cdot O(s^{K2}) ,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. Из доказанного положения вытекает, что для обеспечения требуемого порядка аппроксимации произведения двух дифференциальных операторов каждый из соответствующих им разностных операторов должен иметь порядок аппроксимации не ниже требуемого.

3.I.2.2. Схема второго порядка точности для прямолинейного стержня

Предполагая существование производных от всех функций до 4-го порядка включительно, используя центральные разностные формулы второго порядка аппроксимации / I / , заменим в уравнениях (3.I), (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7) соответствующие производные по X в точках x_i (i = I,2,3,..., n - I) указанными разностными отношениями, отбрасывая остаточные члены x).

Тогда вместо уравнения (3.I) получаем систему уравнений

$$\frac{N_{i+1}(t) - N_{i-1}(t)}{2s} - P_{x,i}(t) = 0 . \qquad (3.8)$$

Суммарный остаточный член

$$O(s^2) = -\frac{s^2}{6} N_i''' + O(s^4) .$$

Вместо уравнения (3.3) получаем систему уравнений

$$-Q_i(t) + \frac{M_{\text{æ},i+1}(t) - M_{\text{æ},i-1}(t)}{2s} - J_{m,i}\frac{\ddot{w}_{i+1}(t) - \ddot{w}_{i-1}(t)}{2s} + \lambda_i \ddot{Q}_i(t) +$$

x) Здесь и ниже мы не будем отличать обозначениями точные и приближенные значения функций.

$$+\frac{N_{i+1}(t)\left(y_{цт,i+1}\right)-y_{N,i+1}(t)-N_{i-1}(t)\left(y_{цт,i-1}-y_{N,i-1}(t)\right)}{2S}-P_{x2,i}(t)y_{цт,i}=0. \quad (3.9)$$

Суммарный остаточный член

$$O(s^2)=\frac{s^2}{G}\left(-M'''_{æ,i}+J_{m,i}\,w'''_i-\left(N_i\left(y_{цт,i}-y_{N,i}\right)\right)'''\right)+O(s^4).$$

Вместо (3.4) получаем, предварительно продифференцировав 2-ой и 3-ий члены, систему уравнений

$$\frac{M_{æ,i+1}(t)-2M_{æ,i}(t)+M_{æ,i+1}(t)}{s^2}-J_{m,i}\left(\frac{\ddot w_{i+1}(t)-2\ddot w_i(t)+\ddot w_{i-1}(t)}{s^2}+\right.$$

$$+\frac{\lambda_{i+1}\ddot Q_{i+1}-\lambda_{i-1}\ddot Q_{i-1}}{s^2}-\frac{y_{m,i+1}-y_{m,i-1}}{2S}\left(\frac{\ddot w_{i+1}(t)-w_{i-1}(t)}{2S}+\lambda_i\ddot Q_i(t)-\right.$$

$$-N_i(t)\frac{w_{i+1}(t)-2w_i(t)+w_{i-1}(t)}{s^2}-\frac{N_{i+1}(t)-N_{i-1}(t)}{2S}\cdot\frac{w_{i+1}(t)-w_{i-1}(t)}{2S}+$$

$$+\frac{N_{i+1}(t)\left(y_{цт,i+1}-y_{N,i+1}(t)\right)-2N_i(t)\left(y_{цт,i}-y_{Ni}(t)\right)+N_{i-1}(t)\left(y_{цт,i-1}-y_{N,i-1}(t)\right)}{s^2}-$$

$$-\frac{P_{x2,i+1}(t)y_{цт,i+1}-P_{x2,i-1}(t)y_{цт,i-1}}{2S}-P_{yi}(t)=0.$$

Суммарный остаточный член

$$O(s^2)=-\frac{s^2}{12}\left(M_i^{IV}-J_{m,i}\,\ddot w_i^{IV}-N_i\,w_i^{IV}+\left(N_i\left(y_{цт,i}-y_{N,i}\right)\right)^{IV}\right)-$$

$$-\frac{s^2}{6}\left(-J'_{m,i}\,\ddot w_i'''-\ddot w_i'\,J_m'''-J_{m,i}\left(\lambda_i\ddot Q_i\right)'''-N_i\,w_i'''-w_i\,N_i'''-\left(P_{x2}\,y_{цт}\right)'''\right)+O(s^4).$$

Вместо (3.6) получаем систему уравнений

$$æ_{c,i}(t)=\frac{w_{i+1}(t)-2w_i(t)+w_{i-1}(t)}{s^2}+\frac{\lambda_{i+1}Q_{i+1}(t)-\lambda_{i-1}Q_{i-1}(t)}{2S}.$$

Остаточный член $O(s^2)=-\frac{s^2}{12}w_i^{IV}-\frac{s^2}{6}\left(\lambda_i,Q_i\right)'''+O(s_4)$.

Вместо уравнений (3.7) получаем систему уравнений

$$\varepsilon_{c,i}(t)=\frac{v_{i+1}(t)-v_{i-1}(t)}{2S}.$$

Остаточный член $O(s^2) = -\frac{s^2}{6} v_i'' + O(s^4)$

В точках x_i усилия и деформации связаны зависимостями $M_{\varkappa_i}(\varkappa_{c,i})$ и $N_i(\varepsilon_{c,i})$.

Запишем уравнения метода прямых в точках $x_i\ (i = 0, n)$, заменяя производные в уравнениях (3.I), (3.3), (3.7) интерполяционными формулами 2-го порядка точности /I / и отбрасывая остаточные члены (здесь эти члены не приведены).

Вместо уравнений (3.I) получаем:

в точке (i = 0)

$$\frac{-3N_0(t) + 4N_1(t) - N_2(t)}{2s} - P_{x,0}(t) = 0\ ; \qquad (3.13)$$

в точке (i = n)

$$\frac{N_{n-2}(t) - 4N_{n-1}(t) + 3N_n(t)}{2s} - P_{x,n}(t) = 0\ . \qquad (3.13a)$$

Вместо уравнений (3.3) получаем[x)]:

в точке (i = 0)

$$-Q_0(t) + \frac{3M_0(t) + 4M_1(t) - M_2(t)}{2s} - J_{m0}\left(\frac{-3\ddot{w}_0(t) + 4\ddot{w}_1(t) - \ddot{w}_2(t)}{2s} + \lambda_0 \ddot{Q}_0(t)\right) +$$

$$+ \frac{-3N_0(t)(y_{цт,0} - y_{N,0}(t)) + 4N_1(t)(y_{цт,1} - y_{N,1}(t)) - N_2(t)(y_{цт,2} - y_{N,2}(t))}{2s} - P_{x,2}(t)\, y_{цт,0} = 0\ ; \qquad (3.14)$$

в точке (i = n)

$$-Q_n(t) + \frac{M_{n-2}(t) - 4M_{n-1}(t) + 3M_n(t)}{2s} - J_{m,n}\left(\frac{\ddot{w}_{n-2}(t) - 4\ddot{w}_{n-1}(t) + 3\ddot{w}_n(t)}{2s}\right) + \lambda_n \ddot{Q}_n(t)) +$$

$$+ \frac{N_{n-2}(t)(y_{цт,n-2} - y_{N,n-2}(t)) - 4N_{n-1}(y_{цт,n-1} - y_{N,n-1}(t)) + 3N_n(t)(y_{цт,n} - y_{N,n}(t))}{2s} -$$

$$- P_{x2,n}(t)\, y_{цт,n} = 0\ . \qquad (3.14a)$$

x) Уравнение (3.I4) соответствует "следящей" продольной силе $N_0(t)$ когда прямая, по которой направлена эта сила, разворачивается в процессе деформирования на угол $\gamma_0(t)$. Если эта прямая фиксирована в плоскости XOY, в уравнение войдет дополнительный член $-N_0(t)\gamma_0(t)$. Это замечание относится также к точке $(i = n)$.

Вместо уравнения (3.4) получаем:

в точке ($i = 0$)

$$\frac{2M_0(t)-5M_1(t)+4M_2(t)-M_3(t)}{s^2} - J_{m,0}\Big(\frac{2\ddot{w}_0(t)-5\ddot{w}_1(t)+4\ddot{w}_2(t)-\ddot{w}_3(t)}{s^2} +$$

$$+\frac{-3\lambda_0\ddot{Q}_0(t)+4\lambda_1\ddot{Q}_1-\lambda_2\ddot{Q}_2(t)}{2s} - \frac{-3J_{m,0}+4J_{m,1}-J_{m,2}}{2s}\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{-3\ddot{w}_0(t)+4\ddot{w}_1(t)-\ddot{w}_2(t)}{2s} - \lambda_0\ddot{Q}_0(t) - N_0(t)\frac{2w_0(t)-5w_1(t)+4w_2(t)-w_3(t)}{s^2} -$$

$$-\frac{3N_0(t)+4N_1(t)-N_2(t)}{2s}\cdot\frac{-3w_0(t)+4w_1(t)-w_2(t)}{2s} +$$

$$+\frac{2N_0(t)\big(y_{\text{цт},0}-y_{N,0}(t)\big)-5N_1(t)\big(y_{\text{цт},1}-y_{N,1}(t)\big)+4N_2\big(y_{\text{цт},2}-y_{N,2}(t)\big)-N_3(t)\big(y_{\text{цт},3}-y_{N,3}(t)\big)}{s^2} -$$

$$-\frac{3P_{x2,0}(t)\,y_{\text{цт},0}+4P_{x2,1}(t)\,y_{\text{цт},1}-P_{x2,2}(t)\,y_{\text{цт},2}}{2s} - P_{y,0}(t) = 0\ ;$$

(3.15)

в точке ($i = n$)

$$\frac{-M_{n-3}(t)+4M_{n-2}(t)-5M_{n-1}(t)+2M_n(t)}{s^2} - J_{m,n}\Big(\frac{-\ddot{w}_{n-3}(t)+4\ddot{w}_{n-2}(t)-5\ddot{w}_{n-1}(t)+2\ddot{w}_n(t)}{s^2} +$$

$$+\frac{\lambda_{n-2}\ddot{Q}_{n-2}(t)-\lambda_{n-1}\ddot{Q}_{n-1}(t)+3\lambda_n\ddot{Q}_n(t)}{2s} - \frac{J_{m,n-2}-4J_{m,n-1}+3J_{m,n}}{2s}\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{\ddot{w}_{n-2}(t)-4\ddot{w}_{n-1}(t)+3\ddot{w}_n(t)}{2s} + \lambda_n\ddot{Q}_n(t) - N_n(t)\,\frac{-w_{n-3}(t)+4w_{n-2}(t)-5w_{n-1}(t)+2w_n(t)}{2s} -$$

$$-\frac{N_{n-2}(t)-4N_{n-1}(t)+3N_n(t)}{2s}\cdot\frac{w_{n-2}(t)-4w_{n-1}(t)+3w_n(t)}{2s} +$$

$$+\frac{-N_{n-3}(t)\big(y_{\text{цт},n-3}-y_{N,n-3}(t)\big)+4N_{n-2}(t)\big(y_{\text{цт},n-2}-y_{N,n-2}(t)\big)-N_{n-1}(t)\big(y_{\text{цт},n-1}-y_{N,n-1}(t)\big)+2N_n(t)\big(y_{\text{цт},n}-y_{N,\ldots}}{s^2}$$

$$-\frac{P_{x2,n-2}(t)\,y_{\text{цт},n-2}-4P_{x2,n-1}(t)\,y_{\text{цт},n-1}+3P_{x2,n}\,y_{\text{цт},n}}{2s} - P_{y,n}(t) = 0\,.$$

(3.15a)

Вместо уравнения (3.6) получаем:

в точке (i = 0)

$$\varkappa_{c,0}(t) = \frac{2w_0(t) - 5w_1(t) + 4w_2(t) - w_3(t)}{s^2} + \frac{-3\lambda_0 Q_0(t) + 4\lambda_1 Q_1(t) - \lambda_2 Q_2(t)}{2s}; \quad (3.16)$$

в точке (i = n)

$$\varkappa_{c,n}(t) = \frac{-w_{n-3}(t) + 4w_{n-2}(t) - 5w_{n-1}(t) + 2w_n(t)}{s^2} + \frac{\lambda_{n-2} Q_{n-2}(t) - 4\lambda_{n-1} Q_{n-1} + 3\lambda_n Q_n(t)}{2s}. \quad (3.16a)$$

Вместо уравнения (3.7) получаем:

в точке (i = 0)

$$\varepsilon_{c,0}(t) = \frac{-3v_0(t) + 4v_1(t) - v_2(t)}{2s}; \quad (3.17)$$

в точке (i = n)

$$\varepsilon_{c,n}(t) = \frac{v_{n-2}(t) - 4v_{n-1}(t) + 3v_n(t)}{2s}. \quad (3.17a)$$

Все уравнения метода прямых в точках ($i = 0, n$) аппроксимируют исходные уравнения также с точностью до s^2.

В полученных уравнениях метода прямых для любой точки (i = = 0,1,2,3,..., n)

$$P_{y,i}(t) = (-m_i \ddot{w}_i(t) - c_{y,i} \dot{w}_i(t) - K_{y,i} w_i(t) + q_{y,i}(t))\, b_i; \quad (3.18)$$

$$P_{x,i}(t) = (-m_i \ddot{v}_i(t) - c_{x,i} \dot{v}_i(t) - K_{x,i} v_i(t) + q_{x,i}(t))\, b_i; \quad (3.18a)$$

$$P_{x_1,i}(t) = (-m_i \ddot{v}_i(t) - c_{x_1,i}(t) \cdot \dot{v}_i(t))\, b_i; \quad (3.18б)$$

$$P_{x_2,i}(t) = (-c_{x_2,i} \dot{v}_i(t) - K_{x,i} v_i(t) + q_{x,i}(t))\, b_i; \quad (3.18в)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{J_i^2 G} \int_0^h \frac{S_i}{b_i}\, dy.$$

Таким образом, вместо системы 5 дифференциальных уравнений в частных производных получены системы уравнений – 3 ($n+1$) обыкновенных дифференциальных и 2 (n + I) алгебраических – метода прямых, аппроксимирующих исходные с точностью $O(\delta^2)$.

3.2. Напряженно-деформированное состояние в сечении железобетонного стержня в процессе колебаний

3.2.I. Основные предпосылки

Для нормального поперечного сечения прямолинейного стержня считается заданной программа деформирования в виде законов изменения кривизны ($\varkappa_c$) и продольной деформации (ε_c).

Материалы стержня характеризуются переменными упругопластическими диаграммами $\sigma - \varepsilon$. Требуется определить на протяжении всего процесса деформирования значения усилий в сечении – изгибающий момент (M) и продольной силы (N).

Деформации сечения удовлетворяют гипотезе плоских сечений.

Поперечное сечение в течение всего процесса деформирования сохраняет форму и размеры.

Кривизна ($\varkappa_c$) и продольная деформация (ε_c) могут изменяться по сложной программе, вызывая знакопеременные упругопластические деформации материала конструкции. Упруго-вязко-пластические свойства бетона и арматуры учитываются их динамическими диаграммами $\sigma - \varepsilon$, определяемыми решениями главы 2.

В случае переменного по длине стержня поперечного сечения пренебрегаем в пределах длины dx элементарного участка влиянием непараллельности слоев, считая, что на длине dx сечение постоянно.

Рассматривается одноосное напряженное состояние, то есть все компоненты напряжений $\sigma_{i,j}$ $(i,j = x,y,z)$, кроме σ_{xx} , равны нулю.

Усилия в сечении могут изменяться непропорционально одному общему параметру, что соответствует случаю сложного нагружения. А.А. Ильюшиным / 2 / доказано, что если траектория деформаций есть прямая линия в пространстве деформаций, то компоненты направляющего тензора деформаций не изменяются в процессе нагружения, то есть осуществляется простое нагружение.

На основе указанного условия нами доказано (доказательство не приводится), что осуществляется простое нагружение волокна прямолинейного стержня.

Под элементарными приращениями деформаций, напряжений и усилий, рассматриваемыми в этом разделе, подразумеваются как бесконечно малые, так и конечные, малые по абсолютной величине приращения, позволяющие с заданной точностью произвести вычисления численными методами.

3.2.2. Традиционное решение

Усилия и деформации относятся к геометрическому центру тяжести сечения и связаны между собой зависимостями

$$M = f_1(\varkappa_c; \varepsilon_c), \tag{3.19}$$

$$N = f_2(\varkappa_c; \varepsilon_c). \tag{3.20}$$

Усилия выражаются через напряжения (относительно начала координат)

$$M = \int_0^h \sigma(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy - N \cdot y_{цт}, \tag{3.21}$$

$$N = \int_0^h \sigma(y)\, b_y\, dy. \tag{3.22}$$

Деформации по высоте сечения

$$\varepsilon(y) = \varkappa_c (y - y_{цт}) + \varepsilon_c. \tag{3.23}$$

Деформации выражаются через перемещения соотношениями (без учета поперечного сдвига)

$$\varkappa_c = \frac{d^2 w}{dx^2}, \tag{3.24}$$

$$\varepsilon_c = \frac{dv}{dx}. \tag{3.25}$$

Деформации $\varkappa_c$ и ε_c выражаются через относительные деформации крайних волокон

$$\varkappa_c = \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(h)}{h}, \tag{3.26}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon(0) - (\varepsilon(0) - \varepsilon(h)) \cdot \frac{y_{цт}}{h} . \qquad (3.27)$$

Связь между напряжениями и деформациями в любой волокне устанавливается зависимостью $\sigma - \varepsilon$. При этом касательный модуль по диаграмме $\sigma - \varepsilon$

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} . \qquad (3.28)$$

Примем, что напряженно-деформированное состояние сечения, достигнутое в фиксированный момент времени в результате изменения $\varkappa_c$ и ε_c по заданной программе, полностью определено, т.е. известны $\sigma(y)$; $E(y)$; $\varepsilon(y)$ и усилия M и N . Рассмотрим приращения $d\varkappa_c$ и $d\varepsilon_c$, которые вызовут приращения деформаций $d\varepsilon(y)$, напряжений $d\sigma(y)$ и усилий dM, dN

Приращения усилий

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_c} d\varepsilon_c + \frac{\partial M}{\partial \varkappa_c} d\varkappa_c , \qquad (3.29)$$

$$dN = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_c} d\varepsilon_c + \frac{\partial N}{\partial \varkappa_c} d\varkappa_c . \qquad (3.30)$$

Приращение деформаций с учетом (2.I.5)

$$d\varepsilon(y) = d\varkappa_c (y - y_{цт}) + d\varepsilon_c . \qquad (3.31)$$

Приращение усилий выражаются:

$$dN = \int_0^h d\sigma(y)\, b_y\, dy = \int_0^h d\varepsilon(y)\, E(y)\, b_y\, dy ; \qquad (3.32)$$

$$dM = \int_0^h d\sigma(y)\, y\, b_y\, dy - dN\, y_т =$$

$$= \int_0^h d\sigma(y)\, y\, b_y\, dy - y_{цт} \int_0^h d\sigma(y)\, b_y\, dy =$$

$$= \int_0^h d\varepsilon(y)\, E(y)\, y\, b_y\, dy - y_{цт} \int_0^h d\varepsilon(y)\, E(y)\, b_y\, dy .$$

(3.33)

Замена в этих формулах $d\varepsilon(y)$ согласно (3.31) приводит

$$dM = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, y\, b_y\, dy - d\varkappa_c\, y_{цт} \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy +$$

$$+ d\varepsilon_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy \; ; \qquad (3.34)$$

$$dN = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy + d\varepsilon_c \int_0^h E(y)\, b_y\, dy \qquad (3.35)$$

или

$$dM = dM_{\varkappa} + dM_{\varepsilon} \; , \qquad (3.34a)$$

$$dN = dN_{\varkappa} + dN_{\varepsilon} \; , \qquad (3.35a)$$

где обозначено

$$dM_{\varkappa} = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})^2\, b_y\, dy \; ,$$

$$dM_{\varepsilon} = d\varepsilon_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy \; ,$$

$$dN_{\varkappa} = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y - y_{цт})\, b_y\, dy \; , \qquad (3.36)$$

$$dN_{\varepsilon} = d\varepsilon_c \int_0^h E(y)\, b_y\, dy \; .$$

В /3/ приведена матрица мгновенной жесткости сечения

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial \varepsilon_c} & \dfrac{\partial N}{\partial \varkappa_c} \\ \dfrac{\partial M}{\partial \varepsilon_c} & \dfrac{\partial M}{\partial \varkappa_c} \end{Vmatrix} \qquad (3.37)$$

Формулы (3.34) и (3.35) выражают то обстоятельство, что осевое удлинение стержня $d\varepsilon_c$, отнесенное к $y = y_{цт}$, вызовет продольное усилие dN_{ε} и при этом произойдет изменение кривизны, для компенсации которой нужно приложить момент dM_{ε} ; соответственно приращение кривизны $d\varkappa_c$ вызовет изгибающий момент

$dM_{æ}$ и , кроме того, дополнительное удлинение оси, для компенсоции которого необходимо приложить продольное усилие $dN_{æ}$.

Изложенные решения, по нашему мнению, описывают один из возможных способов деформирования сечения, оценка которого дана ниже.

3.2.3. Другой способ деформирования

3.2.3.I. Напряженно-деформированное состояние в сечении прямолинейного стержня

Вновь рассмотрим некоторое напряженно-деформированное состояние сечения, достигнутое в результате его деформирования по заданной программе.

Предположим в (3.35), заменяя $y_{ц.т}$ на y^*,

$$d\text{æ}_c \int_0^h E(y)(y-y^*)\, b_y\, dy = 0 \,, \tag{3.38}$$

что соответствует $dN_{æ}$ = 0 в (3.35а). Из этого условия получаем

$$y^* = \frac{\int_0^h E(y)\, y\, b_y\, dy}{\int_0^h E(y)\, b_y\, dy} \,. \tag{3.39}$$

Предположим в (3.34)

$$d\varepsilon_c \int_0^h E(y)(y-y^*)\, b_y\, dy = 0 \tag{3.38a}$$

(что соответствует dM_{ε} = 0 в (3.34а)). Из этого условия получаем вновь формулу (3.39). Эта формула известна. Она выражает мгновенное положение физического центра тяжести сечения из упругого материала, имеющего переменный по высоте модуль упругости. Формула (3.39) может быть преобразована

$$y^* = \frac{E_0 \int_0^h \frac{E(y)}{E_0}\, y\, b_y\, dy}{E_0 \int_0^h \frac{E(y)}{E_0}\, b_y\, dy} = \frac{\int_0^h y\, b_ф(y)\, dy}{\int_0^h b_ф(y)\, dy} \tag{3.39a}$$

где E_0 - начальный модуль; $b_ф(y) = b_y \cdot E(y)/E_0$ - ширина фиктивного сечения. Формула (3.39а) показывает, что y^* может рассматриваться как мгновенный геометрический центр тяжести фиктивного сечения из однородного упругого материала.

Гипотеза плоских сечений запишется

$$d\varepsilon(y) = d\text{æ}_c (y - y^*) + d\varepsilon_c \,. \tag{3.40}$$

Приращения усилий с учетом (3.38) и (3.38а)

$$dM = dM_{\varkappa} = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y-y^*)\,y\,b_y\,dy\ , \tag{3.41}$$

$$dN = dN_{\varepsilon} = d\varepsilon_c \int_0^h E(y)\,b_y\,dy\ . \tag{3.42}$$

При этом $dM_{\varepsilon} = 0\ , \quad dN_{\varkappa} = 0\ .$ (3.43)

Таким образом, приращение каждой деформации сечения вызывает приращение только ей отвечающего усилия. Этот результат выражает принцип суперпозиций на малых приращениях. Компоненты матрицы (3.37) принимают значения

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon_c} = \int_0^h E(y)\,b_y\,dy = B_N\ , \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varkappa_c} = 0\ , \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon_c} = 0\ , \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varkappa_c} = \int_0^h E(y)(y-y^*)\,y\,b_y\,dy = B_M\ , \tag{3.47}$$

где B_N и B_M – мгновенная жесткость сечения соответственно продольная и изгибная.

Формулы (3.44) и (3.47) при условиях (3.45) и (3.46) выражают мгновенные жесткости сечения при сжатии и изгибе и указывают на возможность построения кривых $N - \varepsilon_c$ и $M - \varkappa_c$.

Выразим касательный модуль

$$\dot{E}(y) = \frac{d\sigma(y)}{d\varepsilon(y)} = \frac{d\sigma_{\varkappa}(y)}{d\varepsilon_{\varkappa}(y)} = \frac{d\sigma_{\varepsilon}(y)}{d\varepsilon_{\varepsilon}(y)}\ , \tag{3.48}$$

где $d\sigma_{\varkappa}$, $d\varepsilon_{\varkappa}$, $d\sigma_{\varepsilon}$, $d\varepsilon_{\varepsilon}$, – компоненты приращений напряжений и деформаций, вызванные соответственно приращениями только кривизны и только продольной деформации. При этом

$$d\sigma(y) = d\sigma_{\varkappa}(y) + d\sigma_{\varepsilon}(y)\ , \tag{3.49}$$

$$d\varepsilon(y) = d\varepsilon_{\varepsilon}(y) + d\varepsilon_{\varkappa}(y) . \qquad (3.50)$$

Формула (3.4I) может быть переписана

$$dM_{\varkappa} = \int\limits_0^h E(y)(y-y^*)d\varkappa_c\, y\, b_y\, dy = \int\limits_0^h E(y)\, \varepsilon_{\varkappa}(y)\, y\, b_y\, dy =$$
$$= \int\limits_0^h \sigma_{\varkappa}(y)\, y\, b_y\, dy , \qquad (3.5I)$$

а формула (3.42)

$$dN_{\varepsilon} = d\varepsilon_c \int\limits_0^h E(y)\, b_y\, dy = \int\limits_0^h E(y)\, d\varepsilon_{\varepsilon}(y)\, b_y\, dy =$$
$$= \int\limits_0^h \sigma_{\varepsilon}(y)\, b_y\, dy , \qquad (3.52)$$

где

$$d\varepsilon_{\varkappa}(y) = (y-y^*)\, d\varkappa_c , \qquad (3.53)$$

$$d\varepsilon_{\varepsilon}(y) = d\varepsilon_c . \qquad (3.54)$$

Такая форма записи геометрической гипотезы выражает условие отсутствия взаимного влияния приращений деформаций: приращение кривизны не вызывает изменения продольной деформации линии, имеющей координату $y = y^*$; при приращении продольной деформации, вызванным силой dN_{ε} , приложенной в точке $y = y^*$, сечение перемещается параллельно самому себе.

3.2.3.2. Применение энергетических принципов к решению

Воспользуемся принципом минимума потенциальной энергии, записав выражение энергии через приращения деформаций.

В сечении на оси y произвольно выберем точку $\mathring{y}$, считая, что относительно этой точки приложены приращения деформаций $d\varkappa_c$ и $d\varepsilon_c$; при этом деформация $d\varkappa_c$ вызовет дополнительную продольную деформацию $d\varepsilon_{\varkappa}(\mathring{y})$, а продольная деформация $d\varepsilon_c$ - дополнительную кривизну $d\varkappa_c$.

Гипотеза плоских сечений относительно точки $\mathring{y}$ запишется

$$d\varepsilon(y) = d\varepsilon_{æ}(y) + d\varepsilon_{\varepsilon}(y) = d\varepsilon_{æ1} + d\varepsilon_{æ2} + d\varepsilon_{\varepsilon1} + d\varepsilon_{\varepsilon2} =$$

$$= (dæ_c + dæ_{\varepsilon})(y - \mathring{y}) + d\varepsilon_c + d\varepsilon_{æ}(\mathring{y}) , \tag{3.40a}$$

где обозначено

$$dæ_c(y - \mathring{y}) = d\varepsilon_{æ1} , \qquad dæ_{\varepsilon}(y - \mathring{y}) = d\varepsilon_{\varepsilon2} ,$$

$$d\varepsilon_c = d\varepsilon_{\varepsilon1} , \qquad d\varepsilon_{æ}(\mathring{y}) = d\varepsilon_{æ2} .$$

При этом имеют место соотношения

$$E(y) = \frac{d\sigma_{æ1}(y)}{d\varepsilon_{æ1}(y)} = \frac{d\sigma_{æ2}(y)}{d\varepsilon_{æ2}(y)} = \frac{d\sigma_{\varepsilon1}(y)}{d\varepsilon_{\varepsilon1}(y)} = \frac{d\sigma_{\varepsilon2}(y)}{d\varepsilon_{\varepsilon2}(y)} .$$

Приращение потенциальной энергии

$$dЭ = \frac{1}{2}\Big(\int_0^h E(y)\, d\varepsilon^2_{æ1}(y)\, b_y\, dy + \int_0^h E(y)\, d\varepsilon^2_{æ2}(y)\, b_y\, dy +$$

$$+ \int_0^h E(y)\, d\varepsilon^2_{\varepsilon1}(y)\, b_y\, dy + \int_0^h E(y)\, d\varepsilon^2_{\varepsilon2}(y)\, b_y\, dy \Big) . \tag{3.55}$$

Отметим, что это выражение совпадает с выражением энергии приращений, используемым при формулировании принципа минимальных свойств действительных приращений деформаций в теории пластичности / 4 /.

Условия минимума приращения потенциальной энергии как функции переменных $d\varepsilon_{æ}$ и $d\varepsilon_{\varepsilon}$ выражаются

$$\frac{\partial dЭ}{\partial d\varepsilon_{æ}(\mathring{y})} = 0 , \qquad \frac{\partial dЭ}{\partial dæ_{\varepsilon}} = 0 . \tag{3.56}$$

Используя (3.40а), находим:

$$\frac{\partial d\varepsilon_{æ1}(y)}{\partial d\varepsilon_{æ}(\mathring{y})} = 0 , \qquad \frac{\partial d\varepsilon_{æ2}(y)}{\partial d\varepsilon_{æ}(\mathring{y})} = 1 , \qquad \frac{\partial d\varepsilon_{\varepsilon1}(y)}{\partial d\varepsilon_{æ}(\mathring{y})} = 0 ,$$

$$\frac{\partial d\varepsilon_{\varkappa 2}(y)}{\partial d\varepsilon_{\varkappa}(\mathring{y})} = 0, \qquad \frac{\partial d\varepsilon_{\varkappa 1}(y)}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = 0, \qquad \frac{\partial d\varepsilon_{\varkappa 2}(y)}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = 0,$$

$$\frac{\partial d\varepsilon_{\varepsilon 1}(y)}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = 0, \qquad \frac{\partial d\varepsilon_{\varepsilon 2}(y)}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = y - \mathring{y}.$$

С учетом этих формул условия (3.56) запишутся:

$$\frac{\partial d Э}{\partial d\varepsilon_{\varkappa}(\mathring{y})} = d\varepsilon_{\varkappa} \int_0^h E(y)\, b_y\, dy = 0, \qquad (3.56а)$$

$$\frac{\partial d Э}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = d\varkappa_{\varepsilon} \int_0^h E(y)(y - \mathring{y})\, b_y\, dy = 0. \qquad (3.56б)$$

Следовательно, $d\varepsilon_{\varkappa}$ = 0 и $d\varkappa_{\varepsilon}$ = 0, т.е. минимум приращения потенциальной энергии обеспечивается при условиях, когда приращение кривизны не приводит к приращению продольной деформации, а приращение продольной деформации не приводит к изменению кривизны.

Запишем приращение потенциальной энергии через компоненты $d\varepsilon_{\varkappa}(y)$ и $d\varepsilon_{\varepsilon}(y)$ деформаций волокна

$$d Э = \frac{1}{2}\Big(\int_0^h E(y)\, d\varepsilon_{\varkappa}^2(y)\, b_y\, dy + \int_0^h E(y)\, d\varepsilon_{\varepsilon}^2(y)\, b_y\, dy.$$

Приравнивая нулю соответствующие производные, получаем

$$\frac{\partial d Э}{\partial d\varepsilon_{\varkappa}} = d\varkappa_c \int_0^h E(y)(y - \mathring{y})\, b_y\, dy = 0, \qquad (3.56в)$$

$$\frac{\partial d Э}{\partial d\varkappa_{\varepsilon}} = d\varepsilon_c \int_0^h E(y)(y - \mathring{y})^2\, b_y\, dy = 0. \qquad (3.56г)$$

Полученные уравнения выражают условия равновесия, выраженные соответственно через напряжения $d\sigma_{\varepsilon 1}$ и $d\sigma_{\varkappa 1}$, а из уравнения (3.56в) получаем

$$\mathring{y} = \frac{\int_0^h E(y)\, y\, b_y\, dy}{\int_0^h E(y)\, b_y\, dy} = y^*,$$

т.е. вновь приходим к формуле (3.32).

3.2.3.3. Обсуждение результатов, относящихся к приращениям

На основании результатов предыдущего параграфа можно считать, что действительными являются приращения деформаций сечения $d\varkappa_c$ и $d\varepsilon_c$, отнесенные к его мгновенному физическому центру тяжести y^*, как сообщающие минимум приращению потенциальной энергии. (Этот результат дает нам основание считать, что такой способ деформирования более точно отражает реальную работу конструкции, чем традиционный, рассматривающий приращения деформаций сечения и усилий, отнесенными к геометрическому центру тяжести сечения. В традиционном решении дополнительные усилия dM_ε и $dN_\varkappa$, необходимые для компенсации деформаций $d\varkappa_\varepsilon$ и $d\varepsilon_\varkappa$, приводят, по нашему мнению, к искажению истинных значений усилий и требуют дополнительных энергетических затрат.

Приращения деформаций, напряжений и усилий возникают после достижения сечением некоторого напряженно-деформированного состояния, которое считается известным и определяется всей предшествующей историей процесса. Положение физического центра тяжести y^*, определяемое формулой (3.39), является мгновенным и непрерывно изменяется в процессе деформирования сечения. Предшествующая история процесса в полученных решениях выражается касательным модулем, переменным по высоте сечения.

В полученном решении приращение кривизны не приводит к изменению продольной деформации, а приращение продольной деформации не влияет на изменение кривизны.

Приращение каждого усилия выражается через приращение только ему отвечающей деформации, что составляет принцип суперпозиций на малых приращениях. Приращения напряжений и деформаций в сечении (в рамках гипотезы плоских сечений) выражаются в виде суммы приращений, вызванных только приращением кривизны и только приращением продольной деформации стержня. При этом формула, выражающая геометрическую гипотезу, распадается на две формулы (3.53) и (3.57). Первая формула описывает поворот сечения относительно точки y^*, а вторая – его плоско-параллельное движение.

Выражения компонент матрицы мгновенной жесткости сечения (3.44) – (3.47) указывают на возможность построения зависимостей $M-\varkappa_c$ и $N-\varepsilon_c$.

В заключение отметим, что выше рассматривались бесконечно малые приращения деформаций, напряжений и усилий: $d\varkappa_c$, $d\varepsilon_c$, dM, dN, $d\sigma(y)$, $d\varepsilon(y)$.

В дальнейшем, с учетом реализации решений на ЭВМ, будут рассматриваться конечные элементарные приращения $\delta\varkappa_c$; $\delta\varepsilon_c$; δM; δN; $\delta\sigma(y)$; $\delta\varepsilon(y)$; в связи с чем термин "приращения" может относиться как к бесконечно малым, так и конечным элементарным приращениям.

3.2.4. Полные напряжения, деформации и усилия

Выразим полные напряжения $\sigma(y)$ и деформации $\varepsilon(y)$ волокна, считая, что рассматриваемые элементарные приращения относятся к j -му шагу счета, которому соответствуют известные значения $\delta\varkappa_c^{(j)}$ и $\delta\varepsilon_c^{(j)}$. Принимая при $j = 0$ $\sigma(y) = 0$ и $\varepsilon(y) = 0$, запишем

$$\varepsilon^{(k)}(y) = \sum_{j=0}^{k} \delta\varepsilon^{(j)}(y) = \varepsilon^{(k)}_{\varkappa}(y) + \varepsilon_{\varepsilon}^{(k)}(y) = \sum_{j=0}^{k} \delta\varepsilon_{\varkappa}^{(k)}(y) + \sum_{j=0}^{k} \delta\varepsilon_{\varepsilon}^{(k)}(y) , \tag{3.57}$$

$$\sigma^{(k)}(y) = \sum_{j=0}^{k} \delta\sigma^{(j)}(y) = \sigma_{\varkappa}^{(k)}(y) + \sigma_{\varepsilon}^{(k)}(y) = \sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_{\varkappa}^{(k)}(y) + \sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_{\varepsilon}^{(k)}(y) . \tag{3.58}$$

Выразим полную кривизну, используя условие

$$\varkappa_c^{(k)} = \frac{\varepsilon^{(k)}(0) - \varepsilon^{(k)}(h)}{h} \tag{3.59}$$

и учитывая, что $\delta\varkappa_c^{(j)} = \dfrac{\delta\varepsilon^{(j)}(0) - \delta\varepsilon^{(j)}(h)}{h}$,

$$\varkappa_c^{(k)} = \frac{\sum_{j=0}^{k} \delta\varepsilon^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{k} \delta\varepsilon^{(j)}(h)}{h} = \frac{\sum_{j=0}^{k} \left(\delta\varepsilon^{(j)}(0) - \delta\varepsilon^{(j)}(h)\right)}{h} = \sum_{j=0}^{k} \delta\varkappa_c^{(j)} , \tag{3.60}$$

то есть полная кривизна равна сумме элементарных приращений привизн.

Мгновенное положение точки $y(\varepsilon_{\varkappa}=0)$, относительно которой рассматривается поворот сечения и где $\varepsilon_{\varkappa}(y(\varepsilon_{\varkappa}=0))=0$, может быть определено из геометрических соображений

$$\frac{\varepsilon_{\varkappa}^{(k)}(h)}{\varepsilon_{\varkappa}^{(k)}(0)}=\frac{h-y^{(k)}(\varepsilon_{\varkappa}=0)}{y^{(k)}(\varepsilon_{\varkappa}=0)}$$

, откуда

$$y_{(\varepsilon_{\varkappa}=0)}=y_{\varkappa}=\frac{h}{1-\varepsilon_{\varkappa}^{(k)}(h)/\varepsilon_{\varkappa}^{(k)}(0)}.$$

Так как каждому приращению продольной деформации согласно условию (3.54) соответствует плоско-параллельное перемещение сечения, то

$$\varepsilon_{c}^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}\delta\varepsilon_{c}^{(j)}; \tag{3.61}$$

на каждом шаге приращения деформации $\delta\varepsilon_{c}^{(j)}$ относится к точке y^{k}. При этом

$$\varepsilon_{c}^{(k)}=\varepsilon_{\varepsilon}^{(k)}(y)=\sum_{j=0}^{k}\delta\varepsilon_{c}^{(j)}(y)=\sum_{j=0}^{k}\delta\varepsilon_{c}^{(j)}. \tag{3.61a}$$

Полная нормальная сила в сечении

$$N^{(k)}=\int_{0}^{h}\sigma^{(k)}(y)\,b_y\,dy=\int_{0}^{h}\Big(\sum_{j=0}^{k}\delta\sigma^{(j)}(y)\Big)b_y\,dy=$$

$$=\int_{0}^{h}\Big(\sum_{j=0}^{k}\delta\sigma_{\varkappa}(y)\Big)b_y\,dy+\int_{0}^{h}\Big(\sum_{j=0}^{k}\delta\sigma_{\varepsilon}(y)\Big)b_y\,dy.$$

Так как

$$\int_{0}^{h}\Big(\sum_{j=0}^{k}\delta\sigma_{\varkappa}^{(j)}(y)\Big)b_y\,dy=\sum_{j=0}^{k}\int_{0}^{h}\delta\sigma_{\varkappa}^{(j)}(y)\,b_y\,dy=\sum_{j=0}^{k}\delta N_{\varkappa}^{(j)}=0,$$

то

$$N^{(k)}=\int_{0}^{h}\sum_{j=0}^{k}\delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)}(y))\,b_y\,dy=\sum_{j=0}^{k}\int_{0}^{h}\delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)}(y)\,b_y\,dy=\sum_{j=0}^{k}\delta N^{(j)}, \tag{3.62}$$

то есть продольная сила есть равнодействующая приращений продольных усилий. Положение этой равнодействующей, переменное в процессе деформирования, определяется условием

$$y_N^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k} \left(\delta N^{(j)} \overset{*}{y}{}^{(j)} \right)}{\sum\limits_{j=0}^{k} \delta N^{(j)}} ,$$

где $\overset{*}{y}{}^{(j)}$ – координата точки приложения элементарного приращения усилия $\delta N^{(j)}$, определяемая формулой (3.39).

Полный момент в сечении получим, составив условие равновесия относительно начала координат,

$$M^{(k)} = \int_0^h \sigma^{(k)}(y)\, y\, b_y\, dy - N^{(k)} y_N^{(k)} = \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta\sigma^{(j)}(y) \Big) b_y\, dy - N^{(k)} y_N^{(k)} =$$

$$= \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_{\text{æ}}(y) \Big) b_y\, y\, dy + \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_{\varepsilon}(y) \Big) b_y\, y\, dy - N^{(k)} y_N^{(k)} .$$

Так как

$$\int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)} \Big) b_y\, y\, dy = \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \big(\delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)} (y - \overset{*}{y}{}^{(j)}) + \delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)} \overset{*}{y}{}^{(j)} \big) b_y\, dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^h \delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)} (y - \overset{*}{y}{}^{(j)})\, b_y\, dy + \sum_{j=0}^{k} \int_0^h \delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)}\, b_y\, \overset{*}{y}{}^{(j)}\, dy =$$

$$= 0 + \sum_{j=0}^{k} \int_0^h \delta\sigma_{\varepsilon}^{(j)}\, b_y\, \overset{*}{y}{}^{(j)}\, dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^h \delta\varepsilon_c^{(j)} E^{(j)}(y)\, \overset{*}{y}{}^{(j)}\, b_y\, dy = \sum_{j=0}^{k} \Big(\overset{*}{y}{}^{(j)} \int_0^h \delta\varepsilon_c^{(j)} E^{(j)}(y)\, b_y\, dy \Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\overset{*}{y}{}^{(j)} \delta N^{(j)} \right) = N^{(j)} y_N^{(j)} ,$$

то

$$M^{(k)} = \int_0^h \sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_x^{(j)}(y)\, y\, b_y\, dy = \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta\sigma_x^{(j)}\Big) y\, b_y\, dy =$$

$$= \int_0^h \Big(\sum_{j=0}^{k} \big(E^{(j)}(y)\, \delta\varepsilon_x^{(j)}\big)\Big) y\, b_y\, dy = \int_0^h \sum_{j=0}^{k} \big(E^{(j)}(y)\, \delta\varkappa^{(j)}(y - \overset{*}{y}{}^{(j)})\big)\, y\, b_y\, dy =$$

$$= \int_0^h \sum_{j=0}^{k} \big(\delta\varkappa^{(j)} \big(E^{(j)}(y)(y - \overset{*}{y}{}^{(j)})\big)\big)\, y\, dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \int_0^h \delta\varkappa^{(j)} \big(E^{(j)}(y)(y - \overset{*}{y}{}^{(j)})\big)\, b_y\, y\, dy = \sum_{j=0}^{k} \delta M^{(j)},$$

(3.63)

то есть полный изгибающий момент в сечении есть сумма элементарных приращений моментов.

Используя (3.4I) и (3.42) в (3.62) и (3.63), запишем, заменяя $E^{(j)}(y)$ на $E^{(j-1)}(y)$, т.е. принимая касательный модуль на каждом шаге равным его значению на предыдущем шаге

$$N^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \delta N^{(j)} = \sum_{j=0}^{k} \Big(\Big(\int_0^h E^{(j-1)}(y)\, b_y\, dy\Big)\, \delta\varepsilon_c^{(j)}\Big);$$

$$M^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \delta M^{(j)} = \sum_{j=0}^{k} \Big(\Big(\int_0^h E^{(j-1)}(y)(y - \overset{*}{y}{}^{(j)})\, y\, b_y\, dy\Big)\, \delta\varkappa_c^{(j)}.$$

Учитывая (3.44) и (3.47), перепишем полученные выражения

$$N^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} B_N^{(j)}\, \delta\varepsilon_c^{(j)}, \tag{3.64}$$

$$M^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} B_M^{(j)}\, \delta\varkappa_c^{(j)}. \tag{3.65}$$

По формулам (3.64) и (3.6I) может быть построена кривая $N-\varepsilon_c$, а по формулам (3.65) и (3.60) – кривая $M-\varkappa_c$.

Указанные кривые согут быть выражены некоторыми зависимостями:

$$M^{(k)} = F_1\left(\varkappa_c^{(k)}\right),$$

$$N^{(k)} = F_2\left(\varepsilon_c^{(k)}\right),$$

где функции F_1 и F_2 зависят от совместного действия $\varkappa_c$ и ε_c, т.е. $F_1 = F_1(\varkappa_c; \varepsilon_c)$ и $F_2 = F_2(\varkappa_c; \varepsilon_c)$.
Зависимости $M-\varkappa_c$ и $N-\varepsilon_c$ взаимосвязаны и могут рассматриваться лишь совместно; каждая пара указанных зависимостей соответствует конкретной истории процесса нагружения.

Таким образом, каждое усилие в сечении выражено только через ему отвечающую деформацию, при этом зависимость между ними определяется с учетом совместного действия $\varkappa_c$ и ε_c в течение всей истории процесса.

3.2.5. Связь деформаций с перемещениями

Покажем применимость формул (3.24) и (3.25) в случае рассматриваемого решения, когда приращения деформаций $\delta\varkappa_c$ и $\delta\varepsilon_c$ относятся к точке y^*, мгновенное положение которой дается формулой (3.39), и имея в виду, что (3.24) и (3.25) определяют деформации, отнесенные к геометрическому центру тяжести сечения.

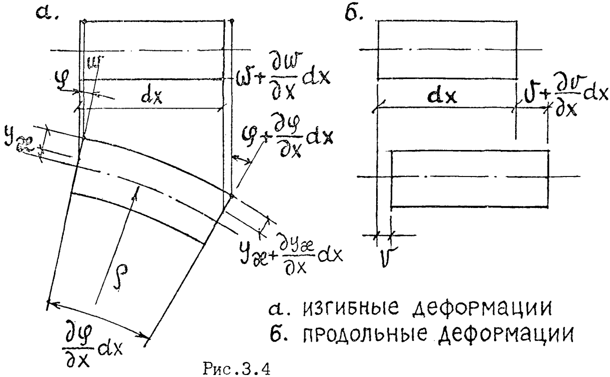
Составим выражение кривизны стержня (рис.3.4а), учитывая, что поворот сечения, вызванный изменением кривизны стержня, происходит относительно переменной точки $y_\varkappa = y(\varepsilon_{\varkappa=0})$. В результате длина дуги элемента $dS \approx dx$ изменится на величину

$$\delta(dx) = (y_{цт} - y_\varkappa)\varphi - \left(y_{цт} - y_\varkappa - \frac{\partial y_\varkappa}{\partial x}dx\right)\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx\right) =$$

$$= \left(\varphi\frac{\partial y_\varkappa}{\partial x} + (y - y_{цт})\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left((y_\varkappa - y_{цт})\varphi\right)dx = \varepsilon_{цт}\,\varkappa\,dx\ .$$

СХЕМА ДЕФОРМАЦИЙ ЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

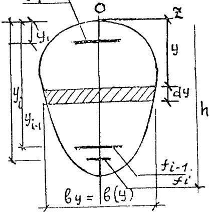


а. изгибные деформации

б. продольные деформации

Рис.3.4

СХЕМА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



Кривизна $\varkappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx + \varepsilon_{цт,\varkappa} dx} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{цт,\varkappa}} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$,

где $\varphi = \frac{dw}{dx}$. Принимая, что деформация оси (совпадающей с геометрическим ц.т.), вызванная изменением кривизны $1/(1+\varepsilon_{цт,\varkappa}) = 1$, приходим к формуле (3.24).

Особенность продольного деформирования характеризуется формулой (3.61а), выражающей параллельное смещение рассматриваемого сечения. В соответствии с рис. 3.4б получаем

$$\varepsilon_c = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

(v – продольное смещение), т.е. продольная деформация выражается формулой (3.25).

Таким образом, деформации и перемещения в рассматриваемом решении выражаются формулами

$$\varkappa = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \varepsilon_c = \frac{dv}{dx}.$$

Суммарная продольная деформация оси стержня, проходящей через геометрический ц.т. сечения, вызванная продольным деформированием и кривизной.

$$\varepsilon(y_{цт}) = \varepsilon_c + \varepsilon_\varkappa(y_{цт}).$$

3.2.6. Формулы для сечения с арматурой

Выпишем основные формулы, учитывая продольную арматуру.

Обозначим ($i = 1, 2, \dots, p$) – порядковый номер ряда арматуры; f_i – ее площадь; y_i – координата (рис.3.5.); E_i – касательный модуль: ε_i и σ_i – деформация и напряжение.

$$\overset{*}{y} = y\delta_N = \frac{\int_0^h E y b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} E_i y_i f_i}{\int_0^h E b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} E_i f_i};$$

$$\delta\varepsilon_{\varkappa i} = \delta\varkappa_c (y_i - \overset{*}{y});$$

$$\delta\varepsilon_{\varepsilon i} = \delta\varepsilon_c; \quad \delta\sigma_{\varkappa i} = E_i \, \delta\varepsilon_{\varkappa i};$$

$$\delta\sigma_{\varepsilon i} = E_i \, \delta\varepsilon_{\varepsilon i}; \quad \delta\sigma_i = \delta\varkappa_i + \delta\sigma_{\varepsilon i};$$

$$\delta N = \delta\varepsilon_c \left(\int_0^h E b_y \, dy + \sum_{i=0}^{p} E_i f_i \right)$$

или в напряжениях

$$\delta N = \int_0^h \delta \sigma_\varepsilon \, b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} \delta \sigma_{\varepsilon i} f_i \; ;$$

$$\delta M_\varkappa = \delta \varkappa_c \left(\int_0^h E (y - \overset{*}{y}) y \, b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} E_i (y_i - \overset{*}{y}) y_i f_i \right)$$

или в напряжениях

$$\delta M_\varkappa = \int_0^h \delta \sigma_\varkappa \, y \, b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} \delta \sigma_{\varkappa i} y_i f_i \; ;$$

$$N^{(k)} = \int_0^h \sigma \varepsilon^{(k)} b_y \, dy + \sum_{i=0}^{p} \sigma_{\varepsilon i}^{(k)} f_i \; .$$

$N^{(k)}$ может также быть представлена в другой записи с использованием представленных выше формул с добавлением в них членов, учитывающих арматуру.

$$M_\varkappa^{(k)} = \int_0^h \sigma_\varkappa^{(k)} y \, b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} \sigma_{\varkappa i} y_i f_i \; .$$

$M_N^{(k)}$ может быть представлен также в другой форме

$$M_N^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\delta \varepsilon_c \left(\left(\int_0^h E y \, b_y \, dy + \sum_{i=1}^{p} E_i y_i f_i \right) - y_{цт} \left(\int_0^h E b_y \, dy - \sum_{i=1}^{p} E_i f_i \right) \right) \right).$$

3.2.7. Численный метод решения уравнения

Для реализации полученных уравнений преобразуем формулы, заменяя содержащиеся в них интегралы по одной из формул численного интегрирования.

Разделим отрезок $[0, h]$ на $2m$ равных отрезка. Тогда

$$y_n = \frac{h}{2m} n \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots, 2m-1, 2m)$$

(h - высота сечения).

Применяя обобщенную формулу Симпсона, получаем вместо формул, представленных в п.3.2.6

$$\overset{*}{y} \approx \frac{h}{2m} \cdot \frac{\begin{array}{l} 4 \cdot 1 \cdot b_1 E_1 + 2 \cdot 2 \cdot b_2 E_2 + 4 \cdot 3 \, b_3 E_3 + 4 \cdot 2 \cdot b_4 E_4 + \ldots + \\ + 4 (2m-1) b_{2m-1} E_{2m-1} + 2m \, b_{2m} E_{2m} + \left(\sum_{i=1}^{p} f_i E_i y_i \right) \dfrac{12 m^2}{h^2} \end{array}}{\begin{array}{l} b_0 E_0 + 4 b_1 E_1 + 2 b_2 E_2 + 4 b_3 E_3 + 2 b_4 E_4 + \ldots \\ \ldots + 4 b_{2m-1} E_{2m-1} + b_{2m} E_{2m} + \left(\sum_{i=1}^{p} f_i E_i \right) \dfrac{6m}{h} \end{array}} \; ;$$

$$\delta N \approx \frac{h}{6m}\Big(b_0\,\delta\sigma_{\varepsilon,0} + 4b_1\delta\sigma_{\varepsilon,1} + 2b_2\,\delta\sigma_{\varepsilon,2} + 4b_3\,\delta\sigma_{\varepsilon,3} + 2b_4\,\delta\sigma_{\varepsilon,4} + \ldots$$

$$\ldots + 4\,b_{2m-1}\,\delta\sigma_{\varepsilon,2m-1} + b_{2m}\,\delta\sigma_{\varepsilon,2m}\Big) + \sum_{i=1}^{p} f_i\,\delta\sigma_{\varepsilon,i}\;;$$

$$\delta M_{\varkappa} \approx \frac{h^2}{12m^2}\Big(4\cdot 1\cdot b_1\,\delta\sigma_{\varkappa,1} + 2\cdot 2\,b_2\,\delta\sigma_{\varkappa,2} + 4\cdot 3\cdot b_3\,\delta\sigma_{\varkappa,3} + 2\cdot 4\,b_4\,\delta\sigma_{\varkappa,4} + \ldots$$

$$\ldots + 4(2m-1)\,b_{2m-1}\,\delta\sigma_{\varkappa,2m-1} + 2m\,b_{2m}\,\delta\sigma_{\varkappa,2m}\Big) + \sum_{i=1}^{p} f_i\,\delta\sigma_{\varkappa_i}\,y_i\;;$$

$$\delta\varepsilon_{\varkappa,n} = \delta\varkappa_c\left(\frac{h}{2m}\,n - y^*\right)\;;$$

$$\delta\varepsilon_{\varepsilon,n} = \delta\varepsilon_c\;;$$

$$\delta\varepsilon_n = \delta\varepsilon_{\varkappa,n} + \delta\varepsilon_c = \delta\varkappa_c\left(\frac{h}{2m}\,n - y^*\right) + \delta\varepsilon_c\;.$$

В результате получена дискретная схема, позволяющая ограничиться определением деформаций, напряжений, касательного модуля в конечном числе фиксированных точек.

Разработанный метод открывает широкие возможности в решении сложных задач статики и динамики. „$\sigma - \varepsilon$" – метод позволяет получить полную информацию о напряжениях, деформациях, усилиях в сечении на протяжении всей "истории" процесса деформирования. При этом зависимости $M(\varkappa_c)$ и $N(\varepsilon_c)$, характеризующие сопротивление сечения, определяются в процессе решения задачи. Подчеркнем, что эти зависимости относятся к сечению, т.е. являются локальной характеристикой конструкции и они используются для определения зависимостей, характеризующих сопротивление конструкции в целом.

Выскажем предварительные соображения по реализации разработанных решений на ЭВМ.

Прямой динамический расчет плоских рам на сейсмическое воздействие на основе численных методов в разработанной постановке (в каждом стержне рамы рассматривается " n " сечений и в каждом сечении рассматривается " m " слоев (волокон), для которых на каждом шаге определяется динамическая диаграмма $\sigma - \varepsilon$, видимо, потребует использования мощных ЭВМ и значительного времени счета при значительном количестве n и m.

Представляется перспективным использовать другой вариант: в упругой стадии работы на каждом цикле (например, арматуры) вести расчет упругой конструкции, переходя к расчету по разработанному методу лишь тех стержней рамы, где возникли пластические деформации (арматуры). Следует ожидать, что пластические деформации возникнут не во всех стержных рамы, а в какой-то их части. Это позволит существенно снизить громоздкость решения. Очевидно при этом появится возможность для расчета конструкций в упругой стадии использовать имеющиеся программные комплексы (например, "Лира").

4. ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЗДАНИЯ, КАК СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИАГРАММОЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В литературе достаточно широко отражены теоретические и экспериментальные вопросы, связанные с изучением поведения конструкций, обладающих различными обобщенными диаграммами сопротивления изгибу, при сейсмических воздействиях (например I, 3). Однако, по нашему мнению, публикации носят разрозненный характер, отличаются методологией и не обобщены; они дают общее представление о возможности и целесообразности использования пластических деформаций, но их практическое использование затруднено.

В СНиП П-7-81 "Строительство в сейсмических районах" пластические деформации учитываются понижением сейсмических нагрузок в 4 или в 8,3 раза в зависимости от допускаемых повреждений зданий.

В проекте СНиП 2.01.08-91 "Строительство в сейсмических районах (взамен СНиП- 2-7-81) предусматривается другой подход: вместо указанных коэффициентов допускается "метод расчета в неупругой стадии с использованием инструментальных записей движения основания при землетрясениях или синтезированных акселерограмм, наиболее опасных для данного здания и характерных для района строительства". То есть предусматривается производить прямой динамический расчет.

Целесообразно провести анализ работы упругопластических конструкций при сейсмических воздействиях в целях:

- выявления основных закономерностей;
- оценки эффективности и целесообразности использования пластических деформаций;
- оценки влияния пластической стадии работы конструкции на расчетные усилия и др.

Для этого были проведены расчеты стержня с идеальной упругопластической $M-æ$ диаграммой сопротивления изгибу (зависимость "момент-кривизна"), как системы с одной степенью свободы без затухания. Динамическая нагрузка принята в виде гармонического ускорения опоры. При этом варьировались амплитуды и периоды колебаний опоры. Рассмотрены 6 значений амплитуд $\ddot{z}_{гр}$, а частота колебаний опоры $\omega_{гр}$ принималась от 0,33 до 2 частоты собственных колебаний конструкций $\omega_к$. Для сравнения при аналогичных исходных данных рассчитаны упругие стержни. Сдвиг фаз не рассматривался. Процесс колебания конструкций определялся на протяжении 6 периодов колебаний. Решение дифференциальных уравнений колебаний выполнено численным (шаговым) методом на ПК I ВМ.

Характерные процессы изменения прогибов, ускорений и усилий во времени представлены на рис. 4.I). В упругой стадии наблюдаются периодические процессы, биения или постоянное нарастание амплитуды (при резонансе). В случае развития пластических деформаций процесс изменения прогибов и ускорений усложняется: максимальные амплитуды прогибов могут достигаться как в первом,так и в последующих периодах; отрицательные амплитуды в ряде случаев превышают положительные; представляет интерес случай одиночного "всплеска" амплитуды прогибов и ускорений; максимальные амплитуды пластических прогибов при коэффициенте пластичности $K = y_{max}/y_т = 1$ соответствуют $\omega_{гр}/\omega_к$ = I, а при 2 < К < 4 эти амплитуды смещаются влево, что соответствует меньшим значениям $\omega_{гр}/\omega_к$; значениям К = 4 ... I5,2 соответствует $\omega_{гр}/\omega_к$ = 0,4.

Наибольший интерес представляет анализ значений коэффициентов динамичности, представленных на рис. 4.3 в логарифмическом масштабе для различных значений коэффициента пластичности К.·На рис. 4.3, 4.4. нанесены также значения $K^д$:

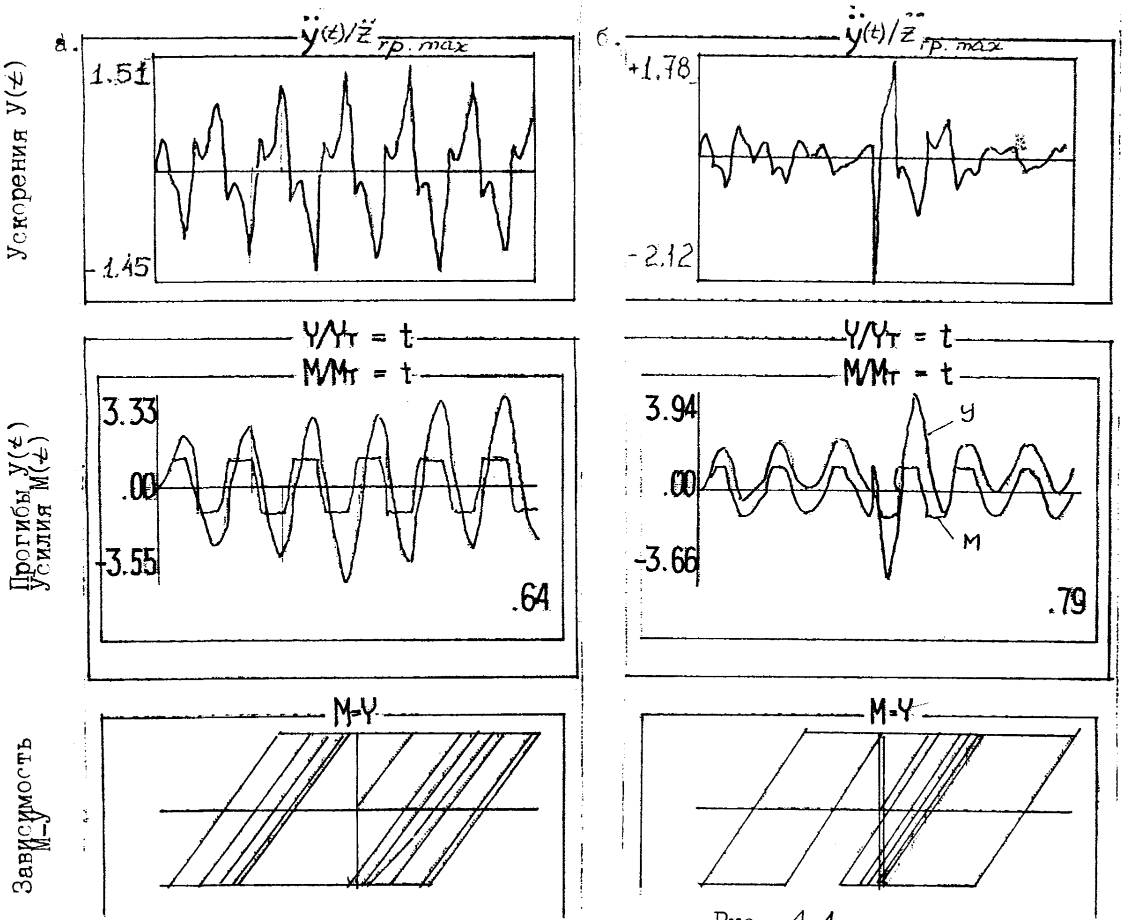
- для упругой конструкции при $\omega_{гр}/\omega_к$ с учетом затухания;
- соответствующие нарастающим в процессе резонансных упругих колебаний значения амплитуд в моменты времени $t = \frac{2\pi}{\omega}; \frac{6\pi}{\omega}; \frac{12\pi}{\omega}$ (рис.4.4)
- максимальные по СНиП П-7-8I п.2.6 для грунтов I,П,Ш категорий, рекомендуемые в случаях первой группы предельных состояний и второй группы предельных состояний (п.2.I7) (рис.4.3).

На рис. 4.3. даны максимальные для каждого К значения коэффициентов динамичности.

Анализ представленных результатов расчетов показывает:

I. Максимальные значения $K^д$ при малых К (I ≤ К < 2) соответствуют резонансным частотам, смещаясь при увеличении К влево в область меньших значений $\omega_{гр}/\omega_к$ (рис. 4.4).

2. Максимальные значения $K^д$ (рис. 4.3) интенсивно уменьшаются при I < К ≤ 4 (при К = I, $K^д$ = I2.6 , а при К=4 $K^д$ = 0,4), и незначительно уменьшаются при дальнейшем увеличении К (при К = I0 - I5 $K^д \approx 0{,}3$).



а – $m\cdot\ddot{z}_{гр}/q_т = 1.072\cdot10^{+1}$

$\omega_{гр}/\omega_к = 0.5$

б – $m\cdot\ddot{z}_{гр}/q_т = 1.072\cdot10^{+1}$

$\omega_{гр}/\omega_к = 0.42$

Мт – момент текучести

$q_т$ – условная равномерно распределенная статическая нагрузка, соответствующая моменту текучести

m – погонная масса

Рис. 4.1

Спектральное распределение коэффициентов пластичности для разных значений амплитуд ускорений опор

$\ddot{z}_{гр}$ – ускорение грунта; $\omega_{гр}$, $\omega_к$ – частоты колебаний; $q_т$ – равномерно распределенная нагрузка, соответствующая моменту текучести; m – погонная масса

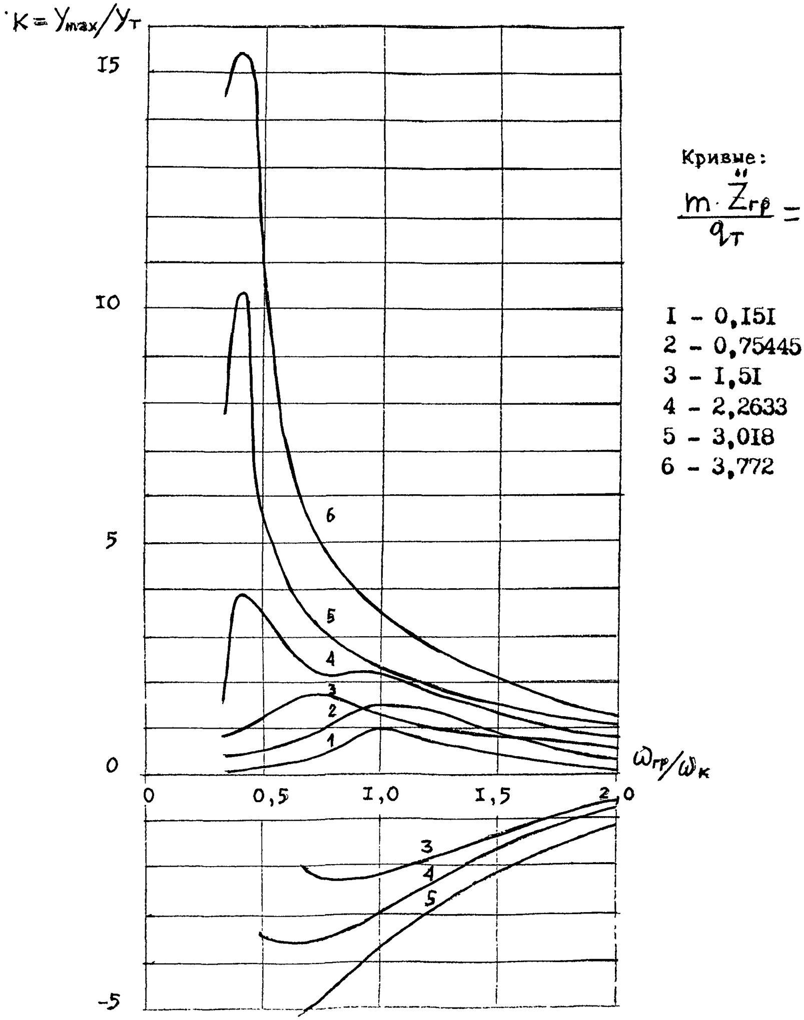
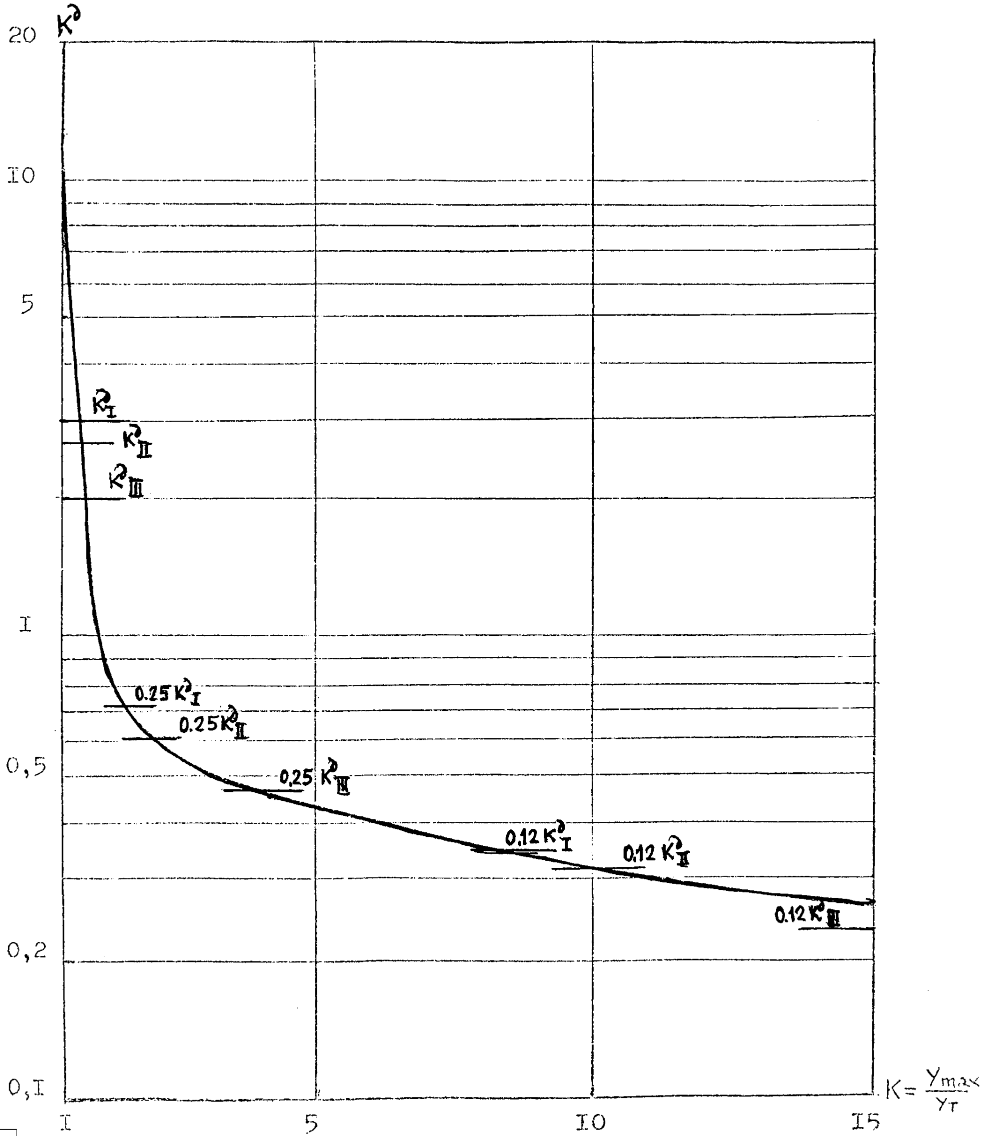


Рис. 4.2

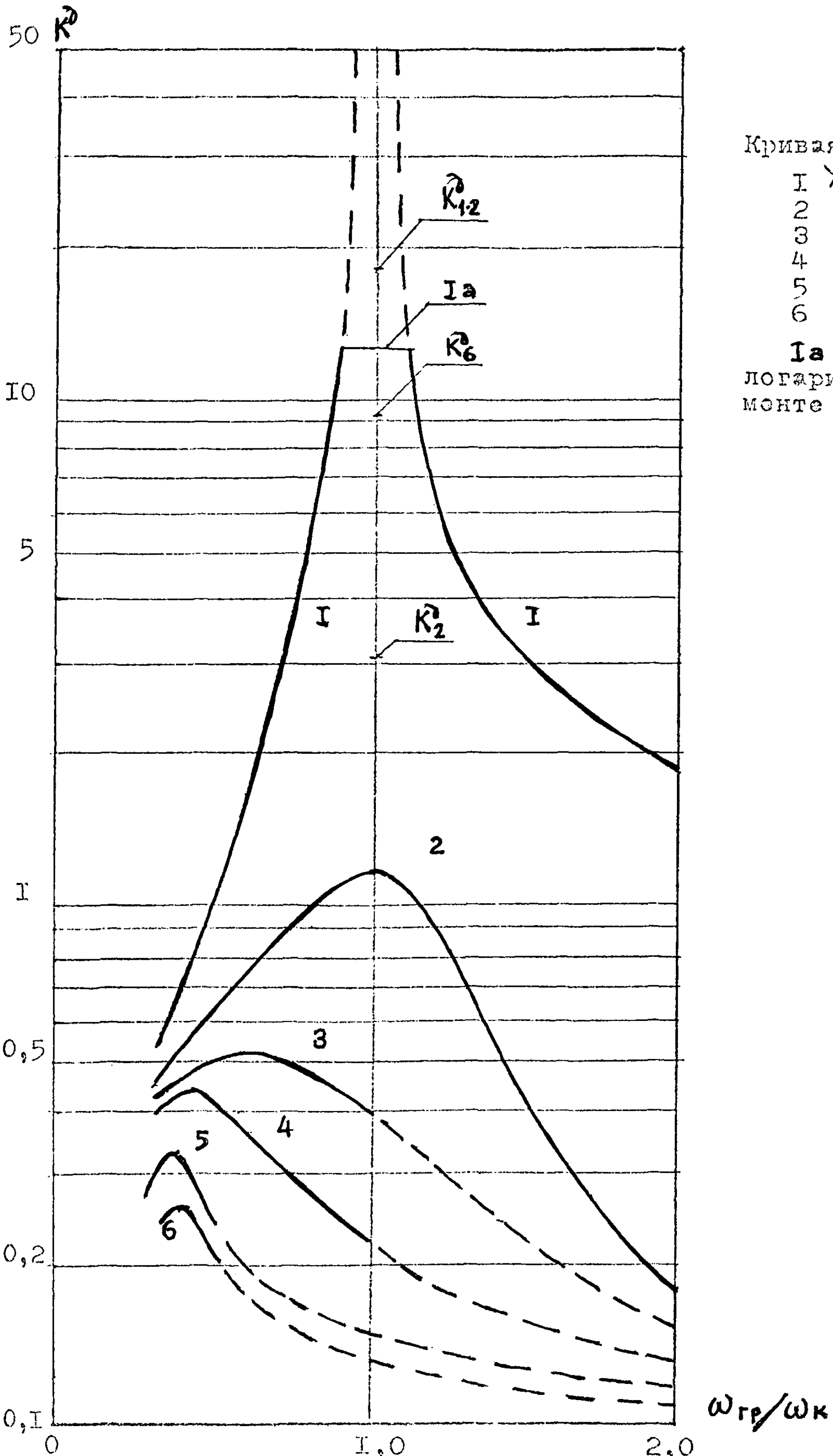
Влияние коэффициента податливости на максимальный коэффициент динамичности



$K^{д}_{I}$; $K^{д}_{II}$; $K^{д}_{III}$ – максимальные значения коэффициентов динамичности для грунтов I, II, III категории по СНиП II-7-81

Рис. 4.3

Спектральное распределение коэффициентов динамичности для разных значений коэффициента пластичности



Кривая:
I $Y_{max}/Y_т$ =I,0
2 =I,5
3 =3,0
4 =5,0
5 =I0,0
6 =I5,0
Iа =I,0 – при логарифмическом декременте затухания δ=0,25

$K^{\partial}_2; K^{\partial}_6; K^{\partial}_{12}$ – коэффициенты динамичности в моменты времени $\frac{\omega_к t}{\pi} = 2; 6; 12$ соответственно

Рис. 4.4

Эти результаты относятся к диапазону частот $\omega_{гр}/\omega_к < 1,0$.
В целом представленная зависимость свидетельствует о высокой эффективности использования пластической стадии работы конструкции. Однако значение К = 4 – 5 целесообразно принять в качестве предельного, так как его дальнейшее увеличение, ухудшая эксплуатационные характеристики конструкции, практически не приводит к снижению расчетной сейсмической нагрузки. Возможно, что с учетом повторных толчков предельное значение К следует принять еще меньшим.

3. Рекомендуемые в /2.3/ значения $K_I^{\partial} = 3$; $K_{II}^{\partial} = 2,7$ и $K_{III}^{\partial} = 2$ соответствуют примерно одному периоду упругих колебаний ($t = 2\pi/\omega$) без затухания в зоне резонансов. Рекомендуемые значения коэффициентов динамичности, равные $0,12\,K_I^{\partial} = 0,35$ и $0,12\,K_{III}^{\partial} = 0,24$, соответствуют $K \geqslant 10$ и представляются заниженными, приводящими к занижению расчетных сейсмических нагрузок.

Использованный способ расчета конструкции на гармоническую нагрузку, с различными периодами колебаний, позволяет произвести спектральный анализ работы упругопластических конструкций. Следует рассмотреть целесообразность и возможность его применения в прямых динамических расчетах зданий и сооружений, как систем со многими степенями свободы.

5. СЕЙСМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗДАНИЯ, КАК РАМЫ, ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ БЕТОНА И АРМАТУРЫ

5.I. Исходные предпосылки и данные

В соответствии с изложенными выше теоретическими положениями разработана и отлажена программа расчета плоских многопролетных многоэтажных рам на заданную акселерограмму. Появилась возможность выполнения прямых динамических расчетов, позволяющих обеспечить полную информацию о процессах колебаний сооружения в целом и каждого его элемента в отдельности. При этом имеется возможность оценки полного спектра критериев расчетного предельного состояния по несущей способности. Этим обеспечивается высокая надежность сооружений. Представленный метод расчета применительно к сейсмостойким конструкциям реализован впервые.

При разработке программы на данном этапе некоторые теоретические положения и факторы упрощены (как достаточно сложные) или отброшены (как не оказывающие существенного влияния).

В частности:

I. Не производится вычисление динамических диаграмм $\sigma^{\partial}-\varepsilon^{\partial}$ в процессе решения задачи (§ 2.2) с учетом скорости деформирования; вместо этого приняты стационарные скелетные диаграммы с фиксированными расчетными динамическими сопротивлениями – идеальная упругопластическая (Прандтля) для арматуры и в виде квадратной параболы с нисходящей ветвью и разгрузкой по прямой для бетона.

2. Отсутствуют члены, выражающие диссипацию энергии.

Для демонстрации возможностей разработанного метода произведен расчет двухпролетной трехэтажной рамы (рис.5.I) на условную акселерограмму, заданную гармонически изменяющимися ускорениями грунта с максимальной амплитудой $\ddot{y}_{1,max}$ = 16 м/с^2 (рис.5.2а), соответствующей II-ти бальному землетрясению; круговая частота колебаний грунта $\omega_{гр}$ = 19,9 I/2 π·с ; продолжительность воздействия – 6 периодов (I,894 с); прекращение счета при t = 2,I с.

Количество отрезков для каждого элемента стен в пределах высоты этажа принято n = 4, а для каждого перекрытия в пределах пролета – n = 6 (система с 67-ю степенями свободы). Число расчетных точек (слоев) в каждом сечении – m = I0 для бето-

Схема рамы; обозначение элементов, сечений, точек

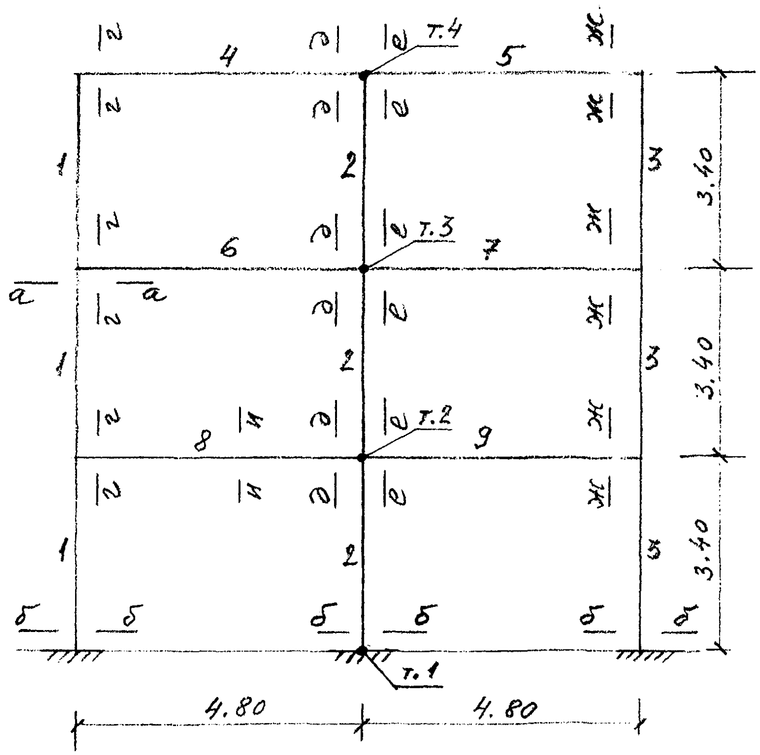


Рис. 5.1

Горизонтальные ускорения точек 1-4

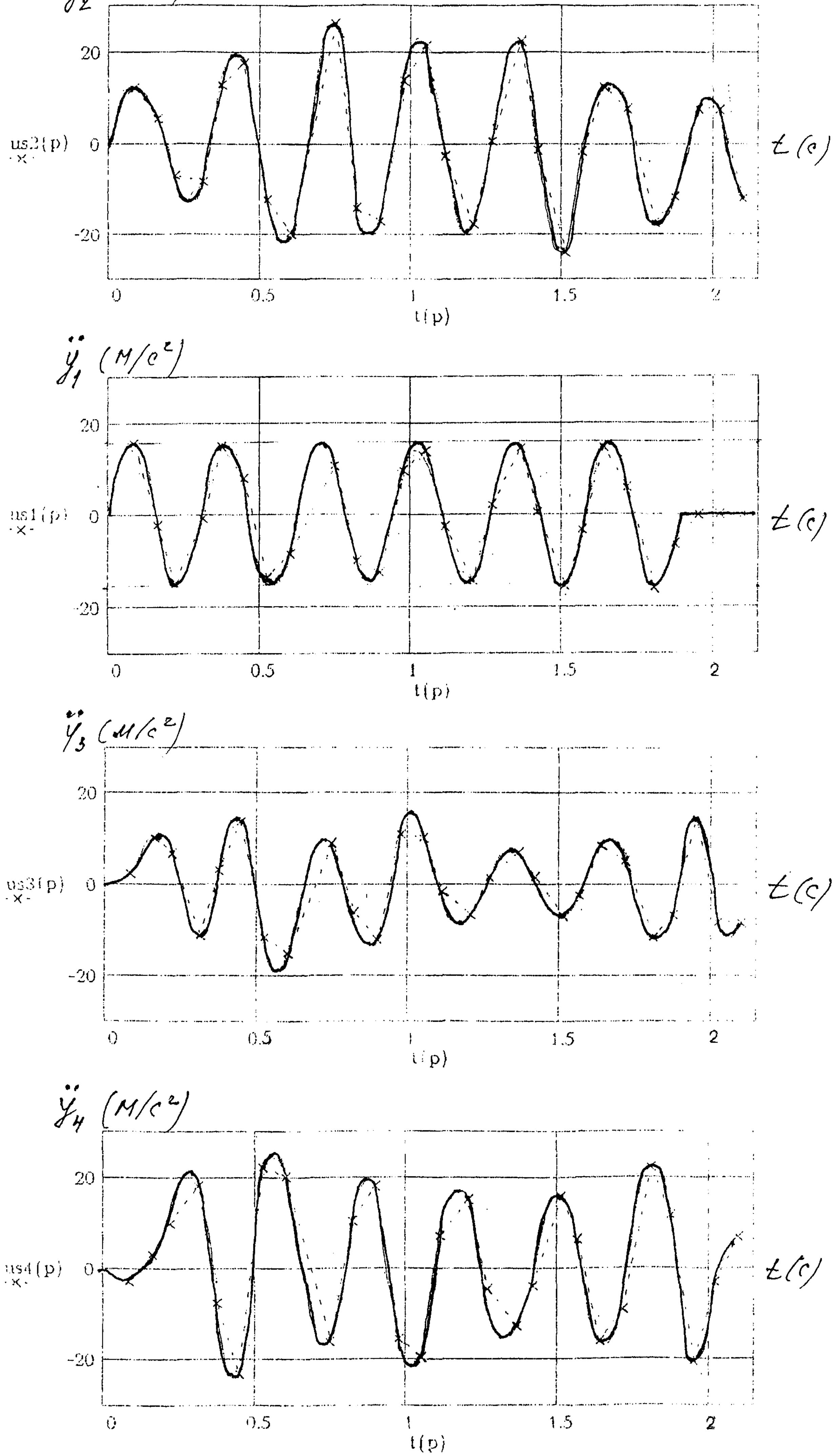
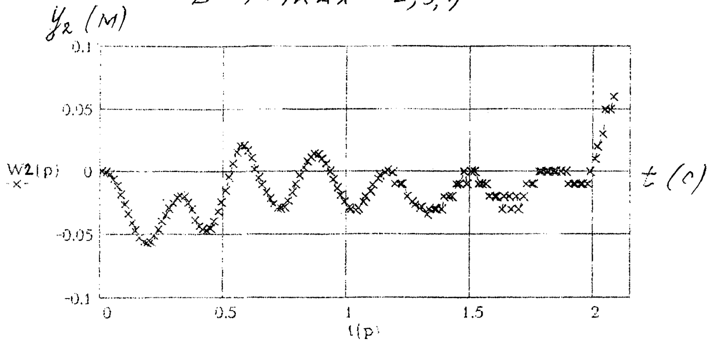
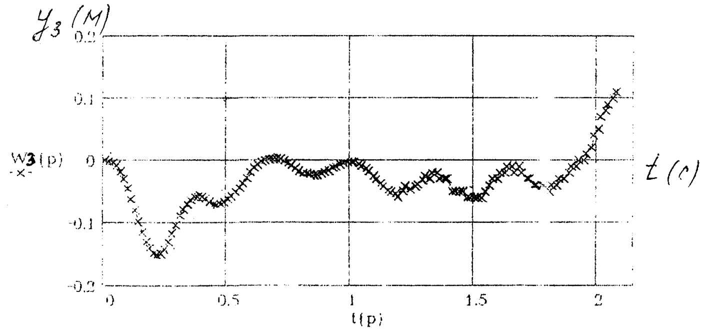


Рис. 5.2 а

Горизонтальные прогибы сооружения в точках 2,3,4





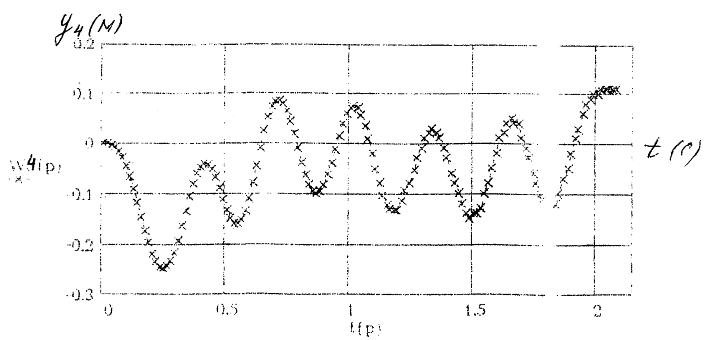


Рис. 5.2б

на плюс 2 для продольной арматуры, расположенной у каждой грани.

Толщина наружных и внутренней стен – 40 см, рабочая высота сечения h_0 = 36 см ; толщины перекрытий – 30 см, рабочая высота сечения h_0 = 26 см. Ширина рамы – 1,0 м. Армирование всех элементов симметричное $\mu = \mu'$ = 0,01 (коэффициент армирования). Сопряжение элементов в узлах рамы – жесткое. Погонные массы элементов стен $0{,}28\ \frac{тс \cdot с^2}{м^2}$, перекрытий $0{,}34\ \frac{тс \cdot с^2}{м^2}$ (с учетом полезной нагрузки).

Расчетное динамическое сопротивление арматуры $R_s^д = 5000$ кгс/см² модуль упругости $E_s = 2{,}1 \cdot 10^6$ кгс/см² ; деформация начала текучести $\varepsilon_{s,т} = 2{,}381 \cdot 10^{-3}$; удлинение при разрыве $\varepsilon_{s,\,разр} = 0{,}10$.

Расчетное динамическое сопротивление бетона $R_b^д = 250$ кгс/см² ; начальный модуль $E_b = 2{,}5 \cdot 10^5$ кгс/см², деформация $\varepsilon_R = 2 \cdot 10^{-3}$.

Критерии расчетного предельного состояния:

Считается заданным $\varkappa_{пред} / \varkappa_т$ = 3 – для всех элементов ; значение $\varkappa_т$ зависит от деформации бетона ε_b в момент начала текучести; при ε_b = (1,25 – 2,0) · 10^{-3} и $\varepsilon_{sт}$ = 2,381 · 10^{-3}

для стен $\varkappa_т$ = (10,0 – 12,0) · 10^{-3} [1/м] и для перекрытий $\varkappa_т$ = (13,0 – 17,0) · 10^{-3} [1/м]; принято $\varkappa_т = 11{,}0 \cdot 10^{-3}$ [1/м] для стен и $\varkappa_т$ = 15,0 · 10^{-3} [1/м] для перекрытий.

Примем предельное отношение максимального горизонтального прогиба верха сооружения (т.4 на рис. 5.1) к прогибу этой же точки, при котором начинается текучесть в опорных сечениях стен $(y_{4,\,max} / y_{4,\,т})_{пред}$ = 3.

Предельная деформация сжатия бетона в изгибаемых элементах $\varepsilon_{b,\,пред}$ = 1,4 ε_R = 2,8 · 10^{-3}.

Предельная деформация растянутой арматуры $\varepsilon_{s\,пред}$ = 0,6 $\varepsilon_{s\,разр}$ = 60 · 10^{-3}. Предельная деформация сжатой арматуры $\varepsilon_{s'\,пред}$ = 2,381·10^{-3}.

5.2. Результаты расчетов

Вычислялись перемещения, кривизны, усилия напряжения и деформации в каждом поперечном сечении. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 5.2 – 5.19 и в таблице 5.1.

На рис. 5.2 а,б приведены графики горизонтальных ускорений и прогибов точек 1 – 4 во времени. На остальных графиках представлено изменение кривизн в различных сечениях всех элементов рамы

ЗДЕСЬ И ДАЛЕЕ НА РИС. 5.3-5.19. ПОСЛЕ НОМЕРА РИСУНКА В СКОБКАХ ОБОЗНАЧЕНО: ЦИФРОЙ - НОМЕР ЭЛЕМЕНТА; БУКВОЙ - СЕЧЕНИЕ (СМ. РИС. 5.1)

Кривизны

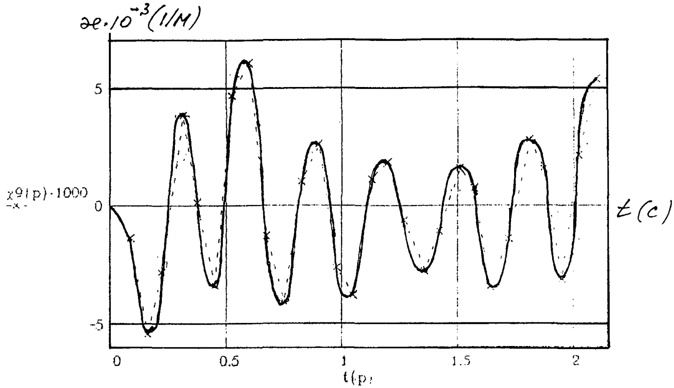


Рис. 5.3 (1а)

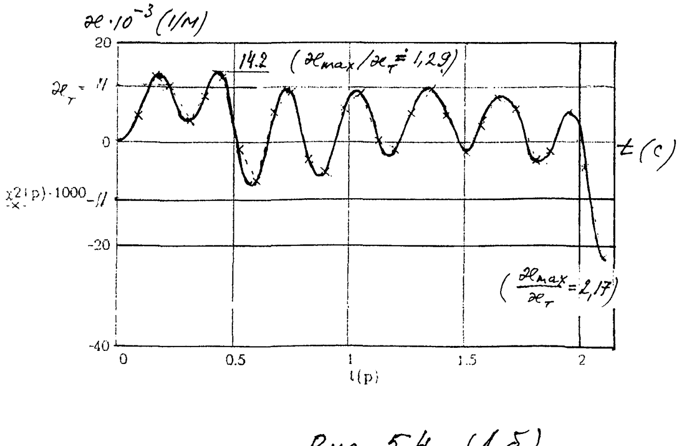


Рис. 5.4 (1б)

Кривизны

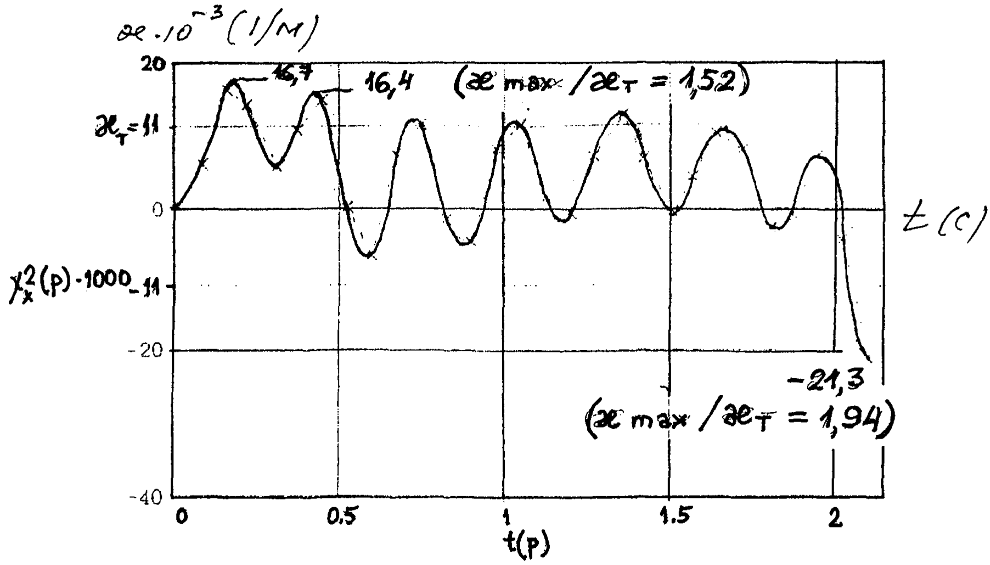


Рис. 5.5 (2 δ)

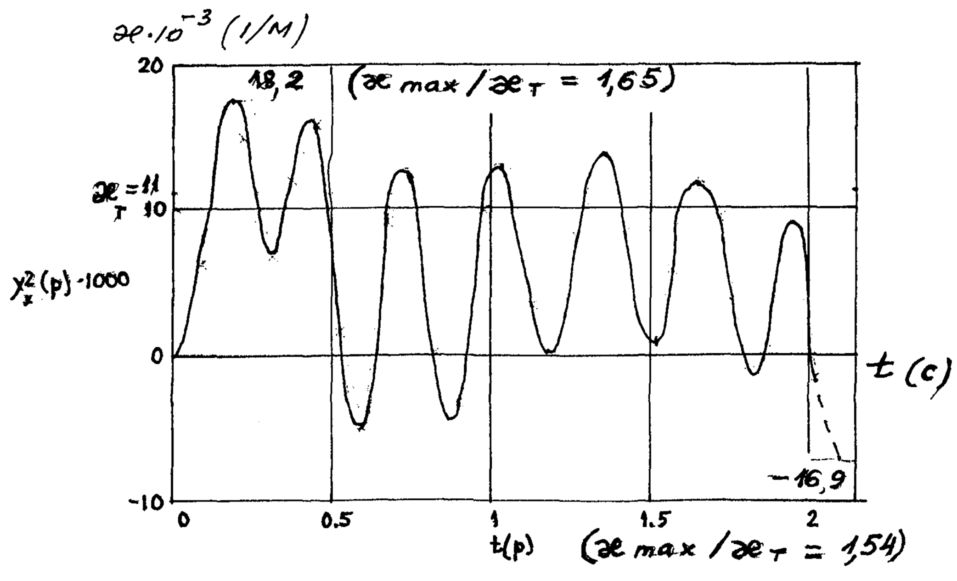


Рис. 5.6 (3 δ)

Кривизны

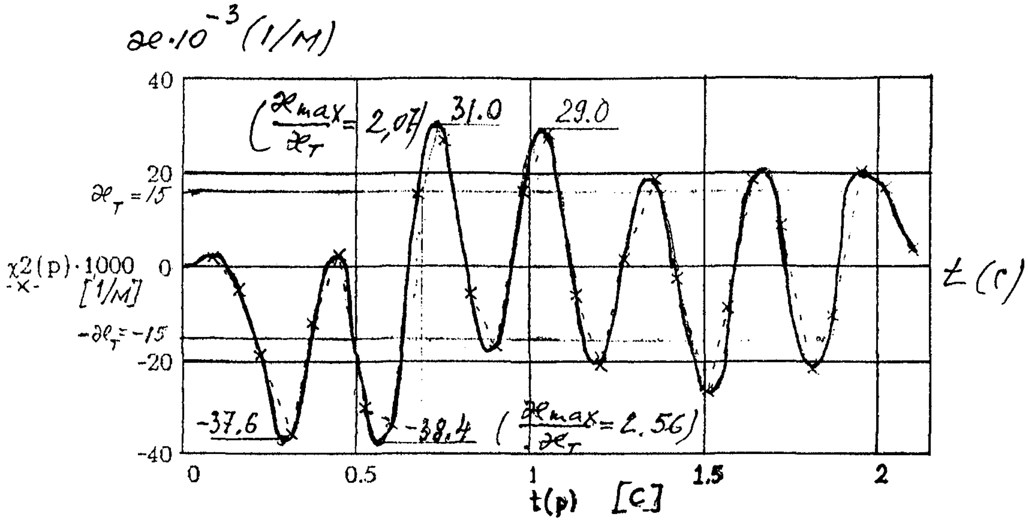


Рис. 5.7 (4г)

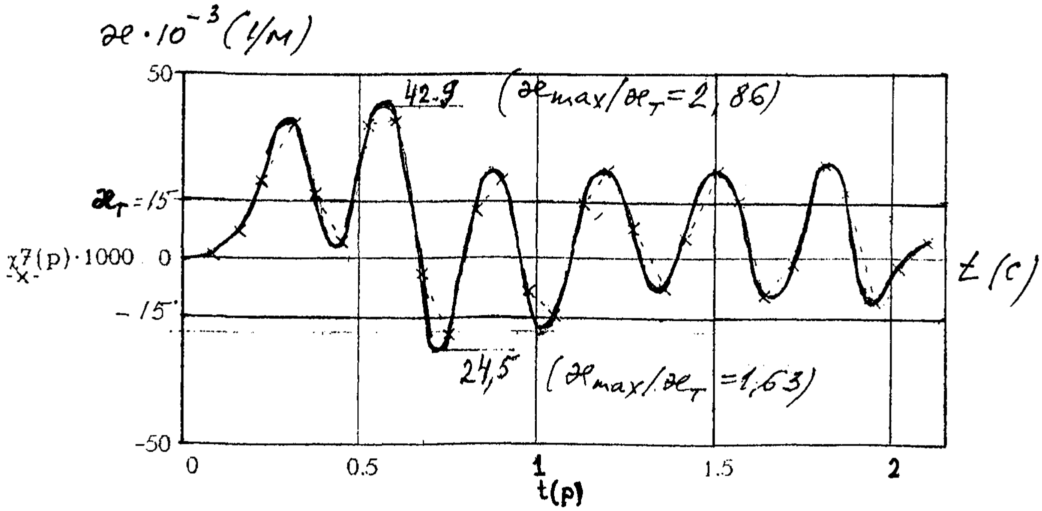


Рис. 5.8 (4д)

Кривизны

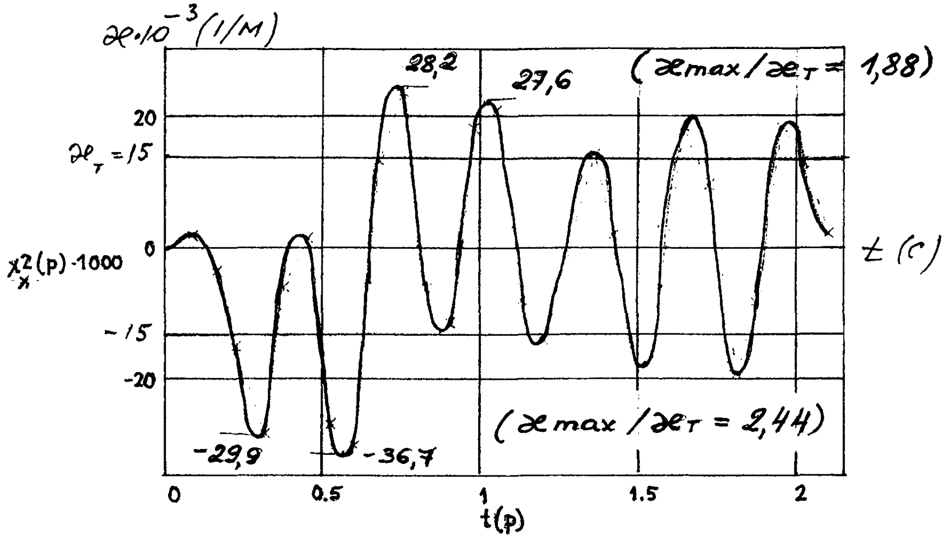


Рис. 5.9 (5е)

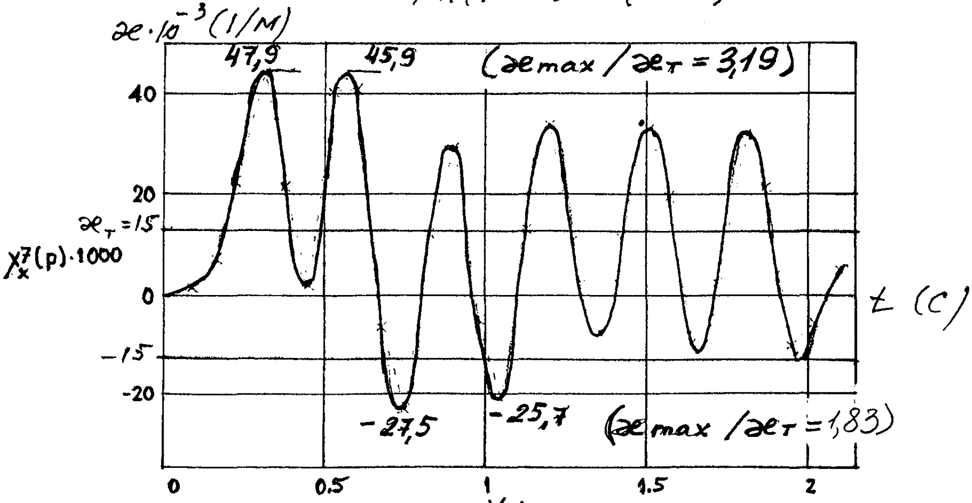


Рис. 5.10 (5ж)

Кривизны

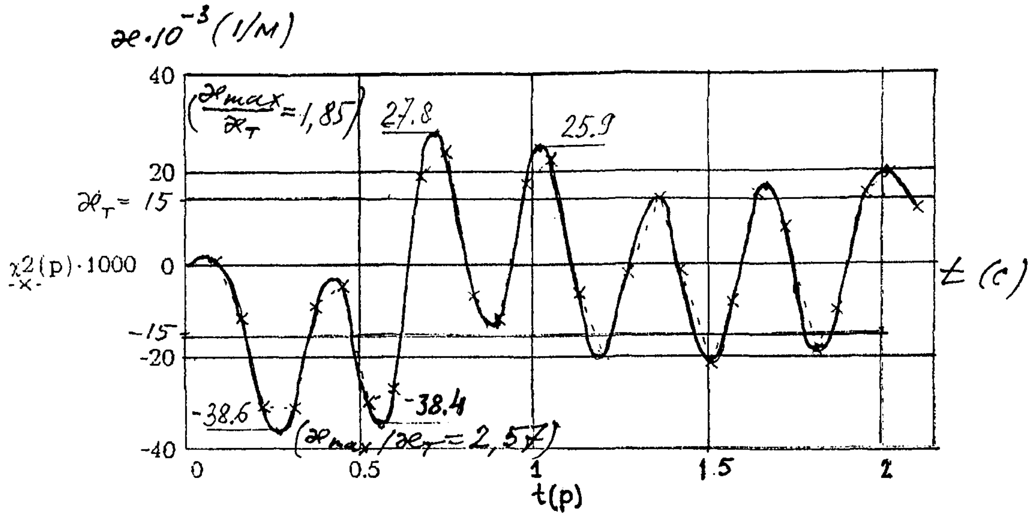


Рис. 5.11 (6 г)

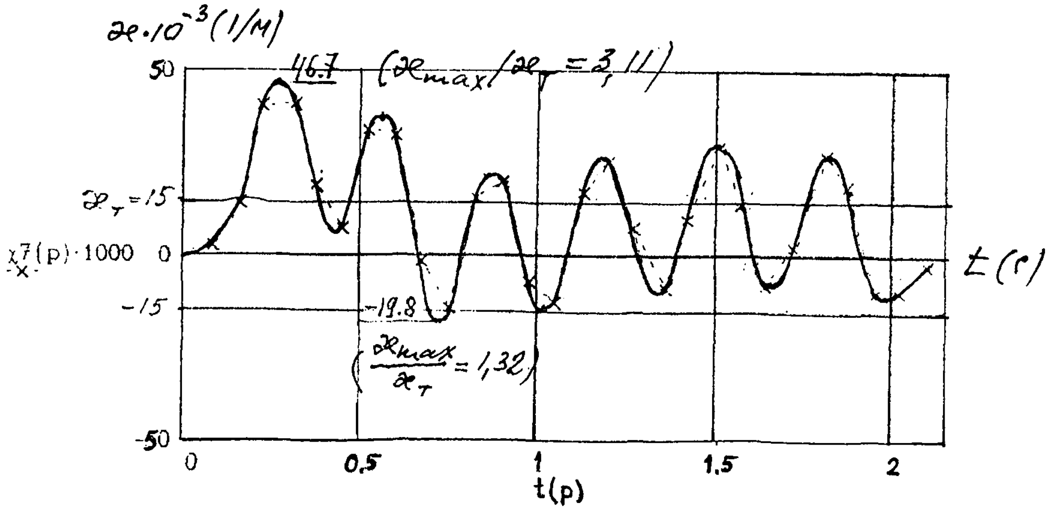


Рис. 5.12 (6 д)

Кривизны

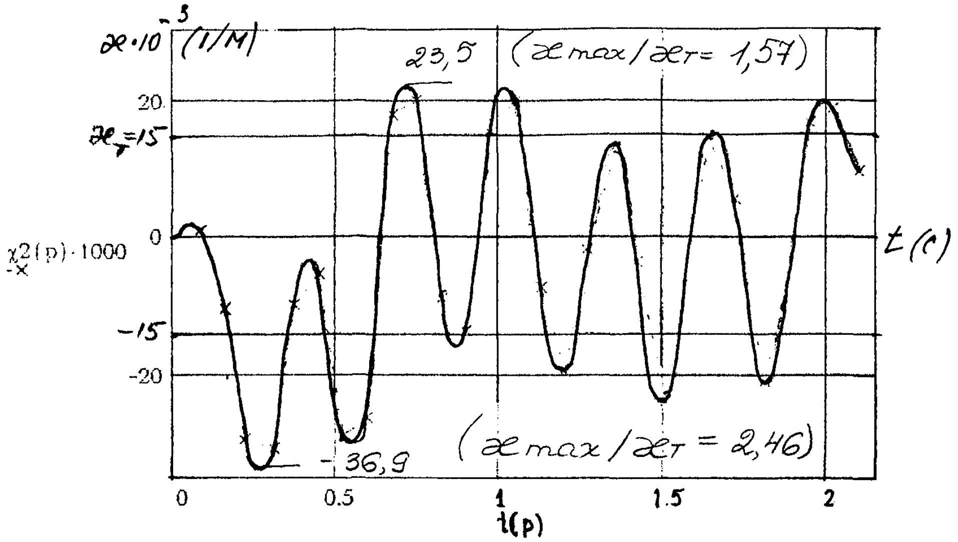


Рис. 5.13 (7 е)

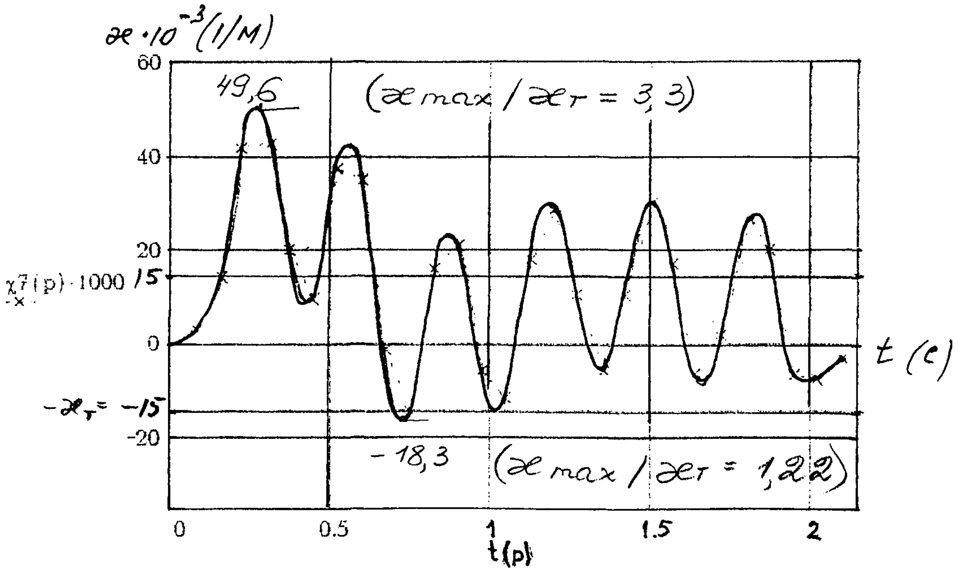


Рис. 5.14 (7 ж)

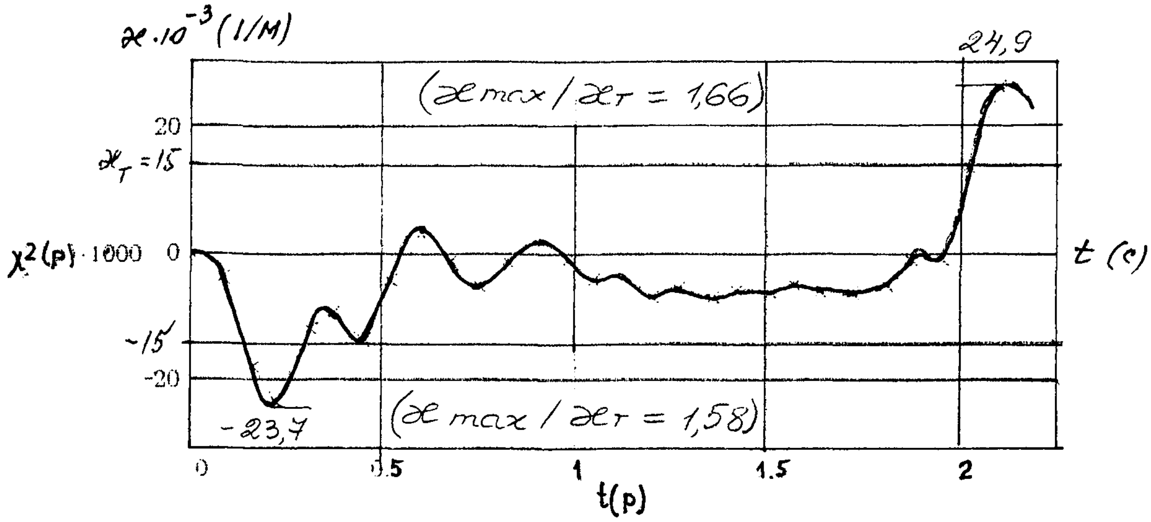


Рис. 5.15 (8 г)

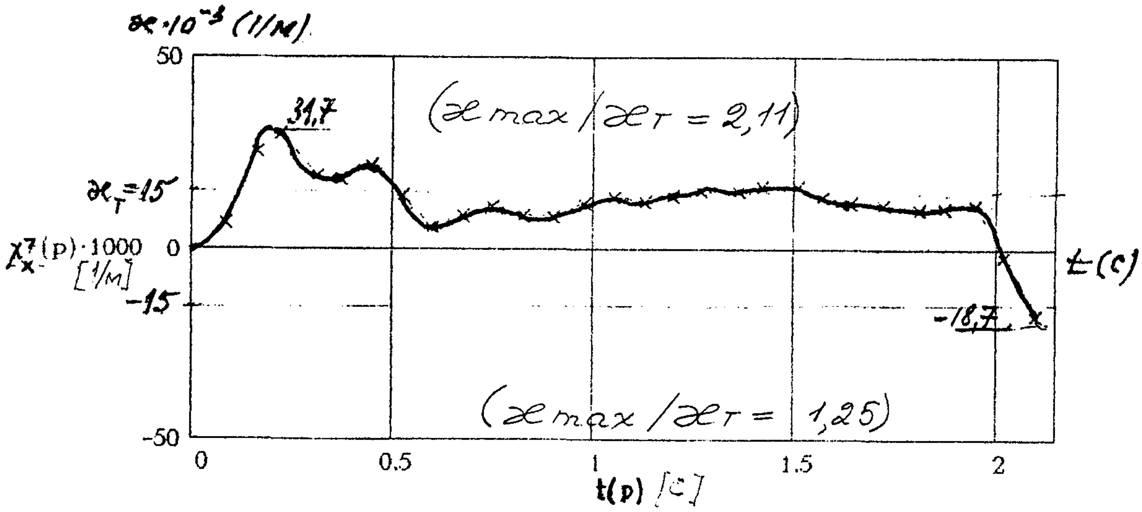


Рис. 5.16 (8 д)

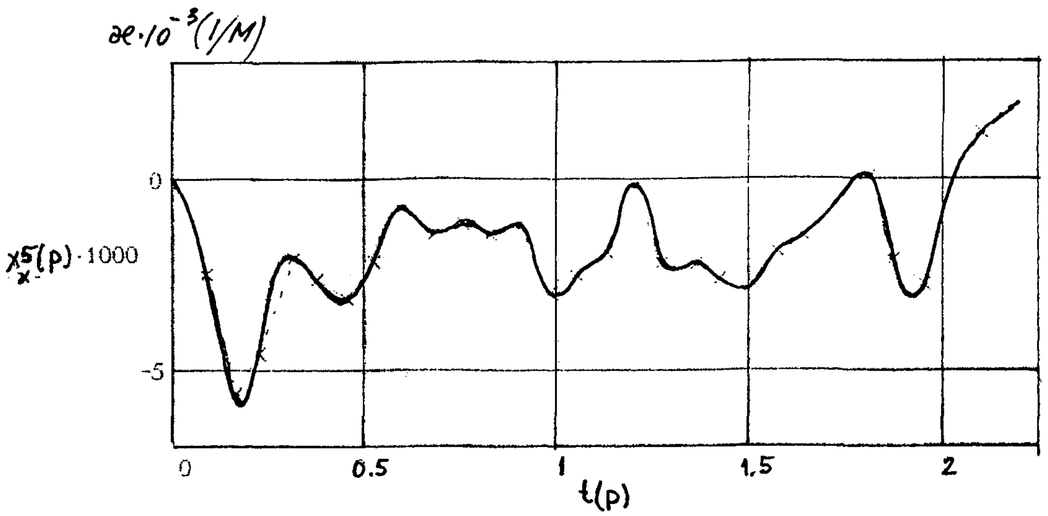


Рис. 5.17 (8 и)

Кривизны

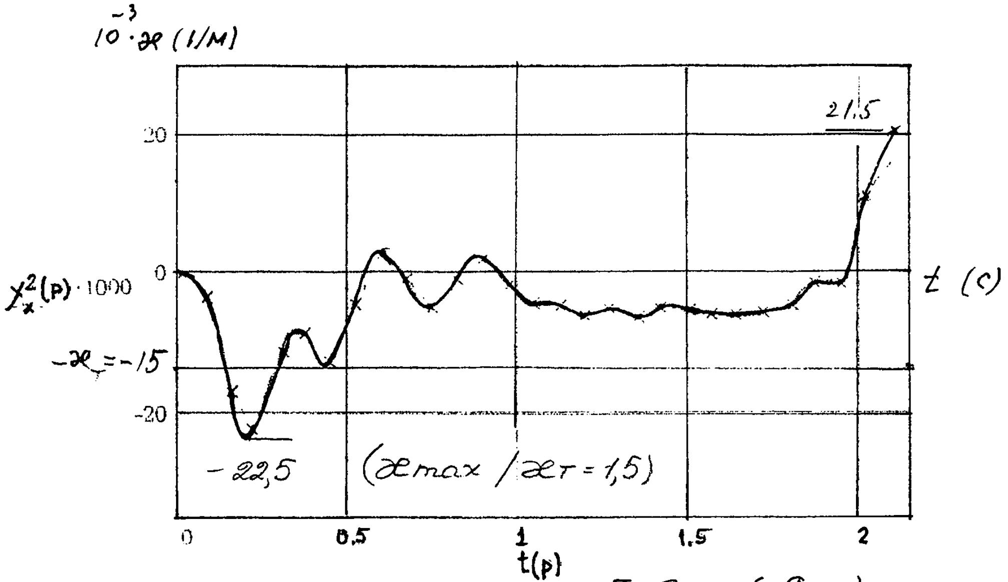


Рис. 5.18 (9 е)

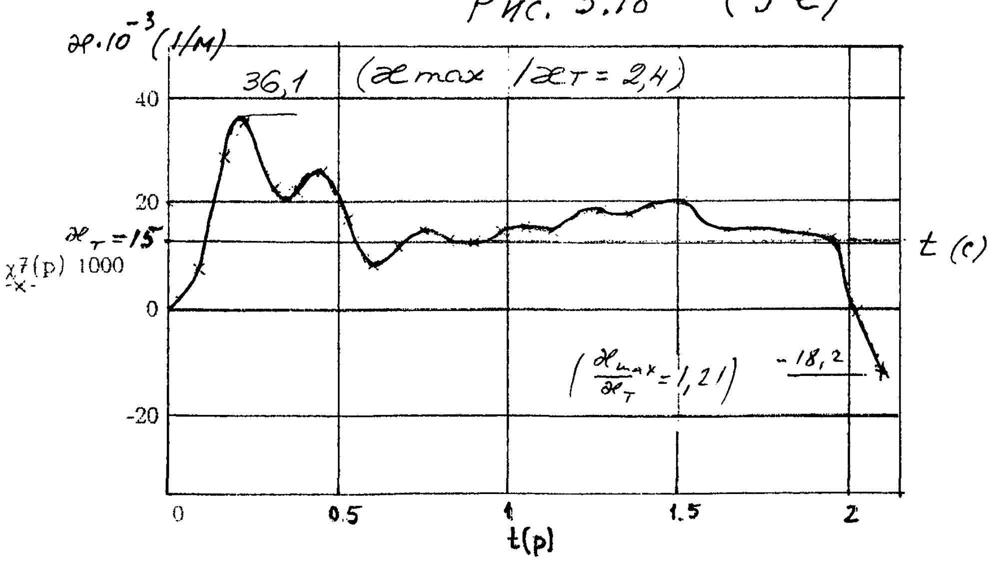


Рис. 5.19 (9 ж)

(номер элемента и сечение согласно рис.5.I обозначены в скобках после номера рисунка соответствующей цифрой и буквой). При этом для всех элементов представлены кривизны во всех сечениях, в которых развивались пластические деформации арматуры (значениям на графиках соответствуют горизонтальные линии); для элементов I и 8 даны по одному графику в сечениях, где деформации арматуры не достигали текучести (рис.5.3 и 5.I7).

В табл.5.I приведены данные, характеризующие максимальные кривизны, максимальные деформации наружного сжатого слоя бетона, продольной растянутой и сжатой арматуры и указаны соответствующие этим значениям моменты времени.

Таблица 5.I

Максимальные кривизны, деформации бетона и арматуры в элементах рамы

Элемент, сечение	Время (с)	$æ_{max} \cdot 10^3$ (I/м)	$\frac{æ_{max}}{æ_T}$	$\varepsilon_{b\,max}\,10^3$	$\varepsilon_{s\,max}\,10^3$	$\varepsilon_{s'\,max}\,10^3$
Iб	2,I	22,5	2,05	I,8	6,3	0,92
2б	2,I	2I,3	I,94	I,8	5,87	0,2I
3б	0,I77	I8,2	I,7I	2,0	4,55	I,25
4д	0,555	42,9	2,86	2,8	7,92	I,05
5ж	0,282	47,9	3,I9	3,4	8,56	I,5
6д	0,57	43,0	2,87	3,2	7,72	I,3I
7ж	0,252	49,6	3,3I	3,5	8,9	I,52
8д	0,I92	3I,7	2,II	2,I	5,8	0,86
9ж	2,07	36,I	2,4I	2,I	6,67	0,9I

Прогиб верхней точки (№ 4) в момент начала текучести в стенах ($t_T \approx 0,137$ с по рис. 5.4, 5.5, 5.6) находим по графику (рис. 5.2б) - y_T = II см; максимальный прогиб этой точки y_{max} = 25 см, y_{max}/y_T = 2,27.

5.3. Анализ результатов расчетов

5.3.I. Общий характер колебательного процесса

Колебания носят сложный характер. На собственные колебания рамы по первой форме накладываются вынужденные колебания, амплитуда которых является определяющей.

Пластические деформации развиваются у опор стен и во всех опорных сечениях перекрытий. При этом сначала начинается текучесть в арматуре стен. Максимальные деформации развиваются в стенах в конце первого полупериода ускорений грунта. В большинстве элементов в арматуре происходит неоднократное изменение знака пластической деформации (от 2 до 9 циклов).

В конце процесса сразу после прекращения движения грунта зафиксировано в стенах и некоторых перекрытиях значительное нарастание пластических деформаций; при этом кривизна имеет другой знак, чем в начале процесса. Это обстоятельство нуждается в дополнительном анализе, для чего необходимо провести вычисления при $t > 2,I$ с. Отношения максимальных горизонтальных ускорений в уровнях перекрытий к ускорению грунта составляют:

$$\ddot{y}_2/\ddot{y}_I = I,63; \qquad \ddot{y}_3/\ddot{y}_I = I,I9; \qquad \ddot{y}_4/\ddot{y}_I = I,62.$$

5.3.2. Оценка состояния сооружения

В опорных сечениях всех перекрытий и в местах опирания стен образуются пластические шарниры. В связи с этим возможно превращение рассчитываемой рамы в мгновенно изменяемую систему, если окажется, что все пластические шарниры в какой-либо отрезок времени могут существовать одновременно. Это требует достаточно трудоемкого анализа во времени. Из сравнения рис. 5.4, 5.5 и 5,6 с рис. 5.7 и 5.8 видно, что в пределах $t < 0,6$ с пластические шарниры дважды образуются во всех элементах, но по времени в элементах стен они смещены по отношению к перекрытиям. Поэтому предварительно можно считать, что $n < 0$.

Отношение $y_{4max}/y_{4,т} = 2,27 < K_y = 3$.

Остаточный горизонтальный прогиб составляет примерно I4 см (I/73 высоты).

Отношение кривизны в элементах №№ 5 и 7 (перекрытия) превосходят предельное $K_{\text{æ пред}} = 3$ до I0% (см.столбец 4 табл.5.I, где $K_{æ} = 3,I9$ и $3,3I$ соответственно); поэтому можно считать, что условие соблюдается.

Максимальные деформации бетона превосходят предельные ($\varepsilon_{b,\text{пред}} = 2,8 \cdot I0^{-3}$) в элементах №№ 5, 6 и 7 (столбец 5 табл.5.I). В этих элементах можно ожидать частичного повреждения сжатой зоны бетона. Деформации растянутой арматуры (столбец 6) и сжатой арматуры (столбец 7) нигде не превосходят предельных значений ($\varepsilon_{s,пред} = 60.10^{-3}$ и $\varepsilon_{s',пред} = 2,381.10^{-3}$ соответственно).

Можно сделать вывод, что сооружение способно выдержать заданное сейсмическое воздействие без обрушения несущих конструкций, но с частичным повреждением бетона сжатой зоны перекрытий; это может потребовать их восстановительного ремонта. Все элементы будут иметь остаточные прогибы, составляющие от одного до двух прогибов текучести. Рама получит в уровне верхнего перекрытия остаточный прогиб около 14 см.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в отчете результаты НИР, направленной на разработку современных методов расчета сейсмостойких зданий и сооружений каркасного типа, как плоских систем, свидетельствуют об актуальности данной проблемы.

Сейсмические нагрузки в виде горизонтальных и вертикальных колебаний грунта целесообразно представлять в виде синтезированной акселерограммы, включающей 2 – 3 максимальные амплитуды ускорений противоположных знаков. Другой вариант задания нагрузок возможно рассматривать в виде серии гармонических колебаний грунта с последующим спектральным анализом (синтез прямого динамического и спектрального методов расчета).

Для оценки эффективности использования пластических деформаций и выявления особенностей процесса упругопластических колебаний конструкции при сейсмических воздействиях на основе 2-го варианта проведены расчеты и анализ системы с одной степенью свободы (с идеальной упругопластической скелетной диаграммой " момент-прогиб").

Показано, что:

– законы изменения прогибов, ускорений и усилий во времени разнообразны: в процессе установившихся колебаний может происходить "всплеск" амплитуд прогибов и ускорений;

– максимальные коэффициенты динамичности, соответствующие резонансным частотам в упругой стадии, с увеличением коэффициента пластичности ($K = y_{max} / y_T$) смещаются в сторону более высоких частот конструкции;

– абсолютные максимумы коэффициентов динамичности (соответствующие различным значениям $\omega_{гр} / \omega_к$) интенсивно уменьшаются при $1 < K < 4$ и незначительно уменьшаются при $K > 5$; значение $K = 4 - 5$ следует считать предельным; при этом значении $K - K^\partial = 0{,}4$ (уменьшение расчетной нагрузки по сравнению с нагрузкой рекомендованной СНиП для упругой конструкции-в 5 – 7,5 раза); значения K^∂, рекомендуемое СНиП-П-7-81 с учетом повреждений, представляются заниженными.

Применение в сейсмических расчетах метода, основанного на использовании динамических упругопластических диаграмм $\sigma - \varepsilon$ арматуры и бетона („$\sigma - \varepsilon$" – метод), представляет возможность решения задач практически любой сложности, учитывая одновременно горизонтальные и вертикальные сейсмические колебания основания. Метод обеспечивает полную информацию о напряженно-деформированном состоянии во всех рассматриваемых сечениях в каждый момент времени, а также информацию о работе арматуры и бетона. Метод снабжен критериями расчетных состояний по несущей способности (I группы). Целесообразно внести коррективы в принятое нормирование расчетных предельных состояний сейсмостойких конструкций (СНиП-П-7-81).

Для реализации динамических методов расчета железобетонных конструкций численными методами разработана математическая модель бетона и арматуры, как упруго-вязко-пластической среды, позволяющая описывать процессы деформирования и разрушения при циклических нагружениях в условиях воздействия интенсивных сейсмических нагрузок.

Основные входящие в уравнение модели константы определены на основе экспериментальных исследований. Теоретические положения модели хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Разработанная модель может использоваться в расчетах конструкций „$\sigma - \varepsilon$" - методом.

„$\sigma - \varepsilon$" - метод разработан применительно к расчету плоских рам на сейсмические нагрузки, как систем с конечным числом степеней свободы. При этом в каждом стержне, входящем в раму, предусматривается возникновение усилий от поперечной и продольной динамических нагрузок. Если расчет ведется только на горизонтальные колебания основания, то может учитываться статическая сжимающая продольная сила (от собственного веса).

Уравнение колебаний стержней, входящих в раму, как системы с бесконечным числом степеней свободы, методом прямых преобразовано в систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, выражающих движение конструкции, и систему алгебраических уравнений, выражающих деформации стержня. При этом использованы конечно-разностные формулы 2-го порядка аппроксимации. Связь между усилиями и деформациями стержня (перемещениями) в каждом рассматриваемом сечении осуществляется с помощью решений, используемых „$\sigma - \varepsilon$" - методом. Во времени решение осуществляется шаговым методом.

Применительно к расчету рам сформулированы граничные условия.

Разработанный метод с некоторыми упрощениями реализован на ЭВМ. Проведен прямой динамический расчет рамы на условную гармоническую акселерограмму. Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности разработанного метода - получена полная информация о работе конструкции в целом и ее отдельных элементов в каждый момент времени; прослеживается весь процесс колебаний, сопровождающийся многократным образованием пластических деформаций в сечениях. Дана оценка состояния сооружения и его элементов путем сопоставления результатов расчета с количественными критериями расчетного предельного состояния по несущей способности.

Подобные результаты получены впервые. Представляется, что в дальнейшем методы расчета сейсмостойких конструкций следует развивать в изложенном направлении.

При этом важно на основе изучения повреждений реальных конструкций, вызванных землетрясениями, уточнять количественные критерии расчетного предельного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Сейсмическое районирование территории СССР - М.: Наука, 1980
2. Вопросы количественной оценки сейсмической опасности - М.: Наука, 1975
3. Крамынин П.И., Чернов Ю.К., Штейнберг В.В. Ускорение колебаний грунтов при сильных землетрясениях - Вопросы инженерной сейсмостойкости. М.: Наука, 1978

К главе 2

1. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия. 1986
2. СНиП П-II-77^{x}. Защитные сооружения гражданской обороны. 1987
3. СНиП П-7-81. Строительство в сейсмических районах. 1982
4. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С. Расчет железобетонных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок. - М.: Стройиздат, 1964
5. Жарницкий В.И., Попов Н.Н., Расторгуев Б.С. Расчет конструкций заглубленных сооружений на действие взрывных волн (В справочнике "Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций") - М.: Стройиздат, 1986
6. Беликов А.А. Прочность и деформативность наружных стен специальных сооружений с учетом упруго-пластических свойств железобетона при кратковременных динамических нагрузках - Канд. дисс, М.: 1985
7. Попов Н.Н., Жарницкий В.И., Забегаев А.В., Беликов А.А. Критерии предельных состояний первой группы в методах расчета железобетонных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок. - Материалы Всесоюзной конференции "Предельные состояния бетонных и железобетонных конструкций энергетических сооружений" - Л.: 1982
8. Рыков Г.В., Обледов В.П., Майоров Е.Ю., Абрамкина В.Т. Экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетонов при интенсивных динамических нагрузках. - Стр.механика и расчет сооружений № 5, 1988
9. Рыков Г.В., Обледов В.П., Майоров Е.Ю., Абрамкина В.Т. Механические характеристики бетонов с учетом их разрушения при кратковременных динамических нагрузках. - Стр.механика и расчет сооружений № 1, 1992

10. Рыков Г.В., Обледов В.П., Майоров Е.Ю., Абрамкина В.Т. Экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетона при циклических динамических нагрузках. - Стр. механика и расчет сооружений № 4, 1989
11. Рыков Г.В., Обледов В.П. Экспериментальные исследования и модель деформирования и разрушения бетонов при однократном и циклическом нагружениях - Доклад на 47-й научно-технической конференции МИСИ, М.: 1991
12. Попов Г.И. Железобетонные конструкции, подверженные воздействию импульсных нагрузок - М.: Стройиздат, 1986
13. Malvern L.E. The propagation of longitudinal waves of plastic exhibiting a strainrate effect. J. Appl. Mech., 18, 1951
14. Kelly T.И. Strain-rate sensivity and yield point behaviour in mild steel. Int. J. of Solids and Structures, 3, 1967
15. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности - М.: Мир, 1968
16. Соколовский В.В. Распространение упруго-вязколастических волн в стержнях - ПММ, т.12, № 3, 1948
17. Котляревский В.А., Ганушкин В.И., Костин А.А., Костин А.И., Ларионов В.И. Убежища гражданской обороны. Конструкции и расчет. М.: 1989
18. Курмаев А.М. Сейсмостойкие конструкции зданий (справочник). Кишинев: Картя молдовеняскэ, 1989

К главе 3

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, тт.1-2 - М.: Физматгиз, 1962
2. Мильюшин А.А. Пластичность - М.: ОГИЗ, 1948
3. Ржаницын А.Р. К вопросу о мгновенной жесткости сечения - Стр. механика и расчет сооружений № 2, 1966
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности - М.: Наука, 1969

К главе 4

1. Ньюмарк Н., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства - М.: Стройиздат, 1980
2. Поляков С.В. Последствия сильных землетрясений - М.: Стройиздат, 1978
3. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий - М.: Высшая школа, 1983