УДК 658.562.014:65.011.56 Группа Т51

ОТРАСЛЕВОЙ СТАНДАРТ

ОСТ 1 00321-78

ОТРАСЛЕВАЯ АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ. ПОДСИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

Построение математических моделей временных рядов показателей

На 25 страницах

Введен впервые

Проверено в 1982 г.

Распоряжением Министерства от 26 декабря 1978 г. № 087-16

срок введения установлен с 1 июля 1979 г.

Настоящий стандарт распространяется на теоретические методы моделирования временных рядов показателей, закладываемых в отраслевой автоматизированной системе управления (ОАСУ).

Стандарт устанавливает способ построения математических моделей, временные ряды которых являются случайными реализациями процессов изменения показателей.

№ изм.	1	2
№ изв.	9071	8340

Инв. № подлинника	4001
Инв. № дубликата	

Издание официальное ГР 8113679 от 07.02.79

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Временные ряды показателей строятся по результатам контроля изделий на этапах производства и эксплуатации. При этом вероятностные оценки значений показателей должны быть состоятельными, а временные ряды представительными.

1.2. Методы, используемые при построении математических моделей, инвариантны к видам показателей и этапам "жизненного цикла" изделий.

1.3. Стандарт позволяет осуществлять построение моделей как стационарных, так и нестационарных со стационарными n -ми приращениями временных рядов.

1.4. Параметрические математические модели используются для прогнозирования будущих значений показателей, для формирования динамических моделей и исследования свойств временных рядов показателей при синтезе автоматизированной системы и т.п.

1.5. Допускается самостоятельное использование алгоритмов и программ, соответствующих основным этапам построения математической модели. Основные этапы построения математической модели:

- проверка ряда на стационарность;
- идентификация пробной модели;
- оценка параметров модели;
- проверка адекватности модели.

2. МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

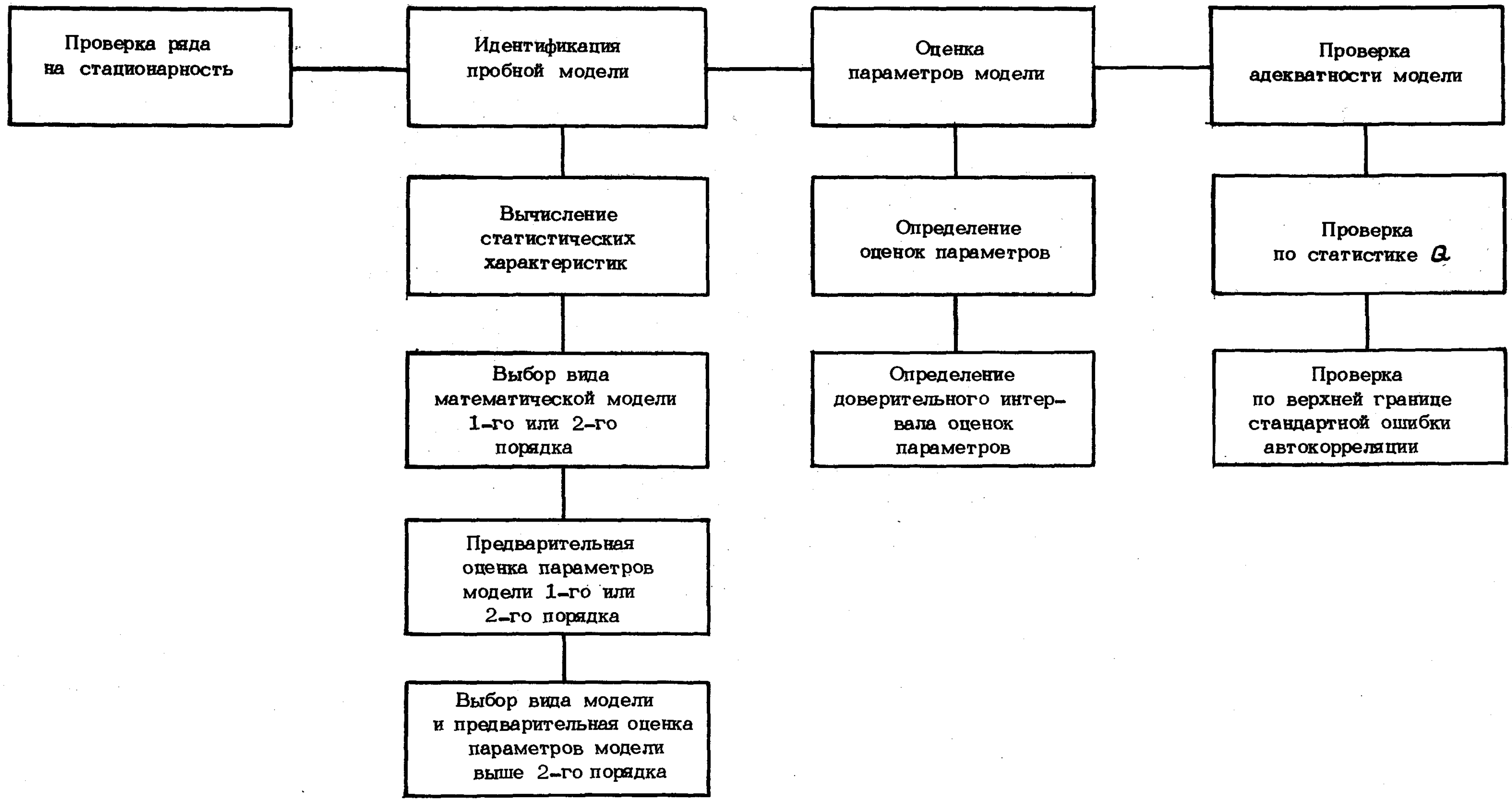
2.1. Общая блок-схема процесса построения математической модели временного ряда представлена на черт. 1.

2.2. Стационарность временных рядов определяется из предположения о нормальности закона распределения значений временного ряда, когда постоянные значения первых двух моментов (математического ожидания и автокорреляционной функции, зависящей только от величины сдвига) обеспечивают строгую стационарность рассматриваемого ряда.

№ изм. | № изв. | 4001 | Инв. № дубликата | Инв. № подлинника

Инв. № дубликата	
Инв. № подлинника	4001

№ изм.											
№ изв.											



Черт. 1

Гипотеза о постоянстве значений первых двух моментов подтверждается, если их изменение во времени не превышает стандартной ошибки $2/\sqrt{N}$ (где N – длина временного ряда). Если гипотеза не подтверждается, то осуществляется взятие разностей

$$P_t = P_t^o - P_{t+1}^o, \qquad (1)$$

при t =1, 2, . . ., N,

где P_t^o – значения показателя, представленные в виде временного ряда;

P_t – значения, полученные в результате взятия разностей.

Число процедур взятия разностей до приведения ряда к стационарному виду определяет порядок нестационарности ряда d ($d \leq 4$). При этом длина стационарного временного ряда становится равной

$$N = N^o - d. \qquad (2)$$

2.3. При построении математических моделей временных рядов используются вспомогательные операторы сдвига назад B и сдвига вперед F, определяемые как

$$B P_t = P_{t-1}; \qquad F P_t = P_{t+1}. \qquad (3)$$

В общем виде

$$B^K P_t = P_{t-K}; \qquad F^K P_t = P_{t+K}, \qquad (4)$$

где K – число шагов сдвига (K =0, 1, . . ., n).

2.4. Целью идентификации временного ряда является выбор наиболее экономной модели среди класса линейных параметрических моделей, с помощью которой может быть описан данный ряд. К этому классу относятся следующие математические модели.

2.4.1. Модель авторегрессии АР

$$\Phi(B)\,\bar{P}_t = a_t, \qquad (5)$$

где $\bar{P}_t = P_t - \mu$ – отклонение значений ряда от его среднего значения μ;

a_t – импульс "белого шума";

$\Phi(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_r B^r$ – оператор авторегрессии;

$\Phi_1, \dots, \Phi_r$ – параметры авторегрессии;

r – порядок процесса авторегрессии.

2.4.2. Модель скользящего среднего СС

$$\bar{P}_t = \theta(B)a_t, \qquad (6)$$

где $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ – оператор скользящего среднего;

$\theta_1, \dots, \theta_q$ – параметры скользящего среднего;

q – порядок процесса скользящего среднего.

2.4.3. Смешанная модель АРСС

$$\phi(B)\bar{P}_t = \theta(B)a_t. \qquad (7)$$

Порядок смешанной модели определяется как сумма ($r + q$).

2.4.4. Модель авторегресси и проинтегрированного скользящего среднего АРПСС

$$\varphi(B)P_t = \theta(B)a_t; \qquad (8)$$

где $\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d$ – обобщенный оператор авторегрессии;

d – порядок нестационарности процесса.

2.5. Выбор вида математической модели временного ряда осуществляется с помощью анализа спектров автокорреляционной и частной автокорреляционной функций.

Гипотеза о равенстве нулю установившихся значений частной автокорреляционной функции подтверждается, если эти значения не превышают по модулю стандартной ошибки выборочной частной автокорреляции.

При проверке гипотезы о равенстве нулю установившихся значений автокорреляционной функции используется стандартная ошибка Бартлетта.

Анализ спектров автокорреляционной и частной автокорреляционной функций состоит в отнесении их к одному из видов:

слабозатухающий спектр – спектр, имеющий на рассматриваемом интервале $K_{зад}$ более половины ненулевых значений, причем первые 6 из них находятся в начале спектра;

быстрозатухающий спектр – спектр, имеющий на рассматриваемом интервале $K_{зад}$ менее половины ненулевых значений, причем в начале спектра это могут быть только первые три составляющие и не менее трех следующих должны быть равны нулю.

2.6. Основные результаты анализа сводятся к следующему. Если спектры обеих функций содержат только первые составляющие, а остальные равны нулю, рассматриваемый процесс аппроксимируется "белым шумом".

Процессу авторегрессии соответствует слабозатухающий спектр автокорреляционной функции и быстрозатухающий спектр частной автокорреляционной функции. Причем число первых ненулевых составляющих частной автокорреляционной функции (за исключением первой, равной 1) соответствует порядку авторегрессии.

Инв. № подлинника 4001 | Инв. № дубликата | № изм. | № изв.

Процессу скользящего среднего соответствует слабозатухающий спектр частной автокорреляционной функции и быстрозатухающий спектр автокорреляционной функции. Число первых ненулевых составляющих автокорреляционной функции (за исключением первой, равной 1) соответствует порядку процесса скользящего среднего.

В случае, когда спектры обеих функций слабозатухающие, подбирается смешанная модель. Для смешанной модели выше второго порядка выбор модели и получение предварительных оценок параметров производится в соответствии с алгоритмом Ньютона-Рафсона.

При выборе вида математической модели должно учитываться то, что в случае высокого порядка (2-3) моделей авторегрессии или скользящего среднего предпочтительнее строить смешанную модель.

Примеры выбора вида математической модели приведены в справочном приложении 1.

2.7. Оценка параметров полученной модели производится в соответствии с критерием наименьших квадратов.

Для среднего и большого числа наблюдений временного ряда в предположении о нормальном распределении его значений изолинии безусловной суммы квадратов импульсов a_t практически совпадают с изолиниями функции правдоподобия. Поэтому точные оценки параметров определяются при минимизации суммы квадратов импульсов a_t в пространстве параметров $(\vec{\phi}, \vec{\theta})$.

$$S(\vec{\phi}, \vec{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^{N} ([a_t / \vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{P}])^2, \qquad (9)$$

где $\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{P}$ – соответственно векторы параметров авторегрессии, скользящего среднего и значений временного ряда.

Безусловная сумма квадратов находится суммированием квадратов всех значений последовательности импульсов a_t, вычисленных из системы уравнений

$$\begin{cases} e_t = \bar{P}_t - \phi_1 \bar{P}_{t+1} - \dots - \phi_r \bar{P}_{t+r} + \theta_1 e_{t+1} + \dots + \theta_q e_{t+q}, \\ a_t = \bar{P}_t - \phi_1 \bar{P}_{t-1} - \dots - \phi_r \bar{P}_{t-r} + \theta_1, \\ e_{-j} = 0, \\ \text{при } j = 0, 1, 2, \dots, n, \end{cases} \qquad (10)$$

$$a_{-j} = 0,$$

$$\text{при } j = T,$$

где e_t – последовательность независимо распределенных случайных импульсов, имеющих нулевое среднее значение и дисперсию $\sigma_e^2 = \sigma_a^2$;

$\bar{P}_t$ – приведенные значения стационарного временного ряда;

T – момент времени, в который оценки $\bar{P}_t$, генерированные возвратной моделью $\phi(F)\bar{P}_t = \theta(F)a_t$ (F – оператор сдвига вперед) практически равны нулю;

$\phi_1, \dots, \phi_r$ – параметры авторегрессии;

r – порядок процесса авторегрессии;

$\theta_1, \ldots, \theta_q$ – параметры скользящего среднего;

q – порядок процесса скользящего среднего.

Оценки параметров получаются итеративным путем из системы нормальных уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{t=1-T}^{N}\left\{a_t^{o} y_{1,t} - (g_1 - g_1^{o})\, y_{1,t}^2\right\} = 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{t=1-T}^{N}\left\{a_t^{o} y_{K,t} - (g_K - g_K^{o})\, y_{K,t}^2\right\} = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $g_1, \ldots, g_K$ – параметры модели;

$K = r + q$ – порядок модели;

$$y_{l,t} = -\frac{\partial a_t}{\partial g_l}, \quad l = 1, \ldots, K. \tag{12}$$

2.8. Определение доверительных интервалов оценок наименьших квадратов осуществляется исходя из того, что приближенная $(1-\mathcal{E})\%$ доверительная область оценок параметров ограничена изолинией суммы квадратов, для которой

$$S = S_{min}\left\{1 + \frac{\chi^2(K)}{N}\right\}, \tag{13}$$

где χ^2 – квантиль уровня $(1-\mathcal{E})$ распределения χ^2 с $K = r + q$ степенями свободы.

2.9. Гипотеза об адекватности полученной модели реальному временному ряду подтверждается, если величина Q распределена приблизительно как $\chi^2(K_\psi - r - q)$,

$$Q = n\sum_{l=1}^{K_\psi}(R_a^2)_l, \tag{14}$$

при $n = N - d$,

где R_a – автокорреляция импульсов a_t.

Величина K_ψ такая, при которой веса ψ модели, представленной в виде

$$\tilde{P}_t = \phi^{-1}(B)\,\theta(B)\,a_t = \psi(B)\,a_t, \tag{15}$$

будут пренебрежимо малы.

Это условие берется в основу проверки адекватности полученной модели исследуемому временному ряду.

Для более строгого утверждения об адекватности модели сравниваются значения модулей автокорреляций остаточных ошибок с верхней границей стандартной ошибки автокорреляции $1/\sqrt{N}$. Если большинство значений автокорреляций (из рассматриваемой последовательности) меньше этой величины, то модель считается удовлетворительной.

3. АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ РЯДА НА СТАЦИОНАРНОСТЬ

3.1. Входные данные:

- число наблюдений временного ряда N;
- значения временного ряда $\{P_t\}$, $t = 1, \ldots, N$.

3.2. Вычисление статистических характеристик проводится следующим образом.

Временной ряд разбивается на участки. На каждом участке должно быть не менее 15 значений временного ряда. Статистические характеристики вычисляются по формулам:

– математическое ожидание:

$$M_0 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} P_t ; \tag{16}$$

– автоковариационная функция:

$$C_l = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \bar{P}_t\, \bar{P}_{t+l} , \tag{17}$$

где $\bar{P}_t = P_t - \mu$ – значения приведенного временного ряда;

l – сдвиг, $l = 0,1, \ldots , K_{зад}$;

– автокорреляционная функция:

$$R_l = C_l / C_0 , \quad l = 0,1, \ldots , K_{зад} , \tag{18}$$

где C_0 – дисперсия ряда.

3.3. Проверка временного ряда на стационарность по M_0, C_0, R_l для $l = 1, \ldots, K_{зад}$ производится по условиям

$$\begin{aligned} &(\bar{M}_0^i - 1) < 2/\sqrt{N}, \quad \bar{M}_0^i = M_0^i / M_0^1 ;\\ &(\bar{C}_0^i - 1) < 2/\sqrt{N}, \quad \bar{C}_0^i = C_0^i / C_0^1 ;\\ &(R_l^i - R_l^1) < 2/\sqrt{N}, \quad l = 1, \ldots, K_{зад}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $i = 1, \ldots, N_y$ – номера участков;

N_y – число участков.

Если все условия выполняются, гипотеза о стационарности временного ряда подтверждается.

3.4. Получение разностного ряда проводится в следующем порядке.

Если какое–либо из перечисленных выше условий не выполняется, гипотеза о стационарности ряда не подтверждается. Производится процедура получения разностного ряда по формуле

$$P_t^{(j)} = P_t^{(j-1)} - P_{t+1}^{(j-1)} , \tag{20}$$

где $j = 1, \ldots, d$ – номер процедуры взятия разностей.

Если $d > 4$, считается, что процесс не может быть приведен к стационарному виду.

3.5. Выходные данные:

– число наблюдений временного ряда N ;

– значения временного ряда $\{P_t\}$, $t = 1, \ldots, N$;

– порядок разности временного ряда d.

4. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

4.1. Входные данные:

– число наблюдений временного ряда N ;

– значения временного ряда $\{P_t\}$, $t = 1, \ldots, N$;

– порядок разности стационарного временного ряда d.

4.2. Приведение ряда к стационарному виду осуществляется при условии $d \neq 0$. В этом случае производится процедура взятия разностей по формуле (20).

4.3. Вычисление статистических характеристик проводится следующим образом.

По формулам (16) – (18) осуществляется вычисление соответственно математического ожидания, дисперсии и автокорреляционной функции. Частная автокорреляционная функция вычисляется по формулам

$$RS_{l,l} = \begin{cases} R_l, & l=1, \\ \dfrac{R_l - \sum\limits_{m=1}^{l-1} RS_{l-1,m} \, R_{l-m}}{1 - \sum\limits_{m=1}^{l-1} RS_{l-1,m} \, R_m}, \end{cases} \qquad (21)$$

при $l > 1$;

$$RS_{l,m} = RS_{l-1,m} - RS_{l,l} \, RS_{l-1,l-m} \qquad (22)$$

при $m = 1, 2, \ldots, l-1$
$l = 2, 3, \ldots, K_{зад}$.

4.4. Вычисление числа ξ, характеризующего отклонение от нуля установившегося значения частной автокорреляционной функции, осуществляется по формуле

$$\xi = \frac{1}{(1/4 \, N)^{1/2}}. \qquad (23)$$

4.5. Вычисление стандартной ошибки Бартлетта осуществляется по формуле

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{i} R_l^2 \right)^{0,5}, \qquad (24)$$

где i – предполагаемый порядок авторегрессии.

4.6. Анализ спектров автокорреляционной и частной автокорреляционной функций

4.6.1. Спектр считается быстрозатухающим, если выполняются следующие условия

$$i \leq 3 \quad \text{и} \quad K \leq K_{зад}/2,$$

где i – номера начальных ненулевых составляющих спектра;

K – число ненулевых составляющих спектра.

Спектр считается слабозатухающим, если выполняются следующие условия:

$$5 \leq i \quad \text{и} \quad K < K_{зад}/2,$$

где i – номера начальных нулевых составляющих спектра;

K – число нулевых составляющих спектра.

4.7. Выбор математической модели (порядок модели не более двух)

4.7.1. Если оба спектра быстрозатухающие содержат только первую составляющую, то процесс описывается моделью "белого шума" с μ_a, σ_a^2.

4.7.2. Если спектр автокорреляционной функции слабозатухающий, спектр частной автокорреляционной функции быстрозатухающий, то процесс описывается моделью авторегрессии. Порядок модели равен

$$r = i - 1, \qquad (25)$$

где i – число первых ненулевых составляющих частной автокорреляционной функции.

4.7.3. Если спектр частной автокорреляционной функции слабозатухающий, спектр автокорреляционной функции быстрозатухающий, то процесс описывается моделью скользящего среднего. Порядок модели равен

$$q = i - 1, \tag{26}$$

где i – число первых ненулевых составляющих автокорреляционной функции.

4.7.4. Если спектры обеих функций слабозатухающие, то процесс описывается смешанной моделью.

4.8. Оценка параметров модели авторегрессии

4.8.1. Для модели авторегрессии 1-го порядка при выполнении условия

$$|R_1| < 1, \tag{27}$$

параметр авторегрессии равен $\Phi = R_1$. В противном случае рассматривается смешанная модель 2-го порядка.

4.8.2. Для модели авторегрессии 2-го порядка при выполнении условия

$$\begin{gathered} |R_1| < 1 \\ |R_2| < 1 \\ R_1^2 < \frac{1}{2}(R_2 + 1), \end{gathered} \tag{28}$$

параметры авторегрессии находятся из уравнений

$$\Phi_1 = \frac{R_1(1 - R_2)}{1 - R_1^2}, \quad \Phi_2 = \frac{R_2 - R_1^2}{1 - R_1^2}. \tag{29}$$

В противном случае рассматривается смешанная модель 2-го порядка.

4.9. Оценка параметров модели скользящего среднего

4.9.1. Для модели скользящего среднего 1-го порядка параметр скользящего среднего определяется по формуле

$$(\theta)_{1,2} = \frac{-\frac{1}{R_1} \pm \sqrt{\frac{1}{R_1^2} - 4}}{2}. \tag{30}$$

Из двух значений θ выбирается то, которое удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |\theta| < 1, \\ \theta = \min(|\theta_1|, |\theta_2|). \end{gathered} \tag{31}$$

Если ни один из корней не удовлетворяет первому условию, рассматривается смешанная модель 2-го порядка.

Инв. № подлинника | 4001 | Инв. № дубликата | № изв. | № изм.

4.9.2. Для модели скользящего среднего 2-го порядка при выполнении условий

$$\begin{aligned} &R_2 + R_1 \geq -0{,}5 \\ &R_2 - R_1 \geq -0{,}5 \\ &R_1^2 \leq 4R_2(1-2R_2), \end{aligned} \qquad (32)$$

параметры скользящего среднего определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \\ R_2 = \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}. \end{cases} \qquad (33)$$

В противном случае рассматривается смешанная модель 2-го порядка.

4.10. Оценка параметров смешанной модели 2-го порядка

4.10.1. Если выполняются условия

$$\begin{aligned} &|R_2| < |R_1| \\ &R_2 > R_1(2R_1+1), \quad R_1 < 0 \\ &R_2 > R_1(2R_1-1), \quad R_1 > 0, \end{aligned} \qquad (34)$$

параметры модели определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\theta} \\ R_2 = \phi R_1. \end{cases} \qquad (35)$$

В противном случае рассматривается смешанная модель выше 2-го порядка.

4.11. Оценка параметров смешанной модели выше 2-го порядка

4.11.1. Параметры авторегрессии определяются из уравнений

$$\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{X}, \qquad (36)$$

при $B_{ij} = C_{|q+i-j|}$,

$X_i = C_{q+i}$,

$i = j = 1, \ldots, r$.

4.11.2. Оценки параметров скользящего среднего определяются в соответствии с алгоритмом Ньютона-Рафсона, представляющего собой следующую итеративную процедуру:

- вычисление модифицированных автоковариаций временного ряда

$$C_{мод_j} = \sum_{i=0}^{r} \phi_i \sum_{k=0}^{r} \phi_k C_{|j+i-k|} \qquad (37)$$

для $j = 1, \ldots, q$,

$\phi_0 = -1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_q = 0;$

Инв. № подлинника 4001

Инв. № дубликата

№ изм.

№ изв.

– вычисление f_j

$$f_j = \sum_{K=0}^{q-j} \lambda_K \lambda_{K+j} - C_{мод_j} , \tag{38}$$

при $j = 1, \ldots, q$, $\lambda_0 = \sqrt{C_{мод_0}}$,

если

$$|f_j| < |\beta| . \tag{39}$$

для $j = 1, \ldots, q$,

при β заданном, вычисляются оценки параметров скользящего среднего

$$\theta_j = \lambda_j / \lambda_0 , \qquad j = 1, \ldots, q . \tag{40}$$

В противном случае вычисляются новые значения λ_j , $j = 1, \ldots, q$

$$\vec{\lambda}^{(i)} = \vec{\lambda}^{(i-1)} - \vec{H}, \tag{41}$$

где $[(\vec{T})_1 + (\vec{T})_2] \vec{H} = \vec{f}$, а матрицы T составляются следующим образом

$$(\vec{T})_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{q-1} & \lambda_q \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_q & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$(\vec{T})_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{q-1} & \lambda_q \\ 0 & \lambda_0 & & \lambda_{q-2} & \lambda_{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Производится переход к началу итеративного цикла.

Максимальное число раз прохождения итеративного цикла принято равным 10. Если при этом условие (39) ни разу не выполнится, ряд считается неидентифицируемым.

Максимальный порядок смешанной модели равен 4.

4.12. Выходные данные:

– вид и порядок модели временного ряда r, q, d ;

– значения предварительных оценок параметров модели

$$\Phi_i , \; i = 1, \ldots, r ; \qquad \theta_j , \; j = 1, \ldots, q .$$

5. АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

5.1. Входные данные:

– число значений временного ряда N ;

– значения временного ряда $\{P_t\}$, $t = 1, \ldots, N$;

– вид и порядок модели временного ряда r, q, d ;

– значения предварительных оценок параметров модели

$$\Phi_i , \; i = 1, \ldots, r ; \qquad \theta_j , \; j = 1, \ldots, q ;$$

– таблица процентных точек распределения χ^2;

– критерий сходимости γ ;

– приращение δ ;

– уровень значимости χ^2 –распределения ε.

Инв. № подлинника	Инв. № дубликата
4001	

№ изв.	№ изм.

5.2. Процедура определения случайной последовательности импульсов a_t в процессе вычислений производится несколько раз, поэтому она должна быть выделена отдельным блоком (блок А).

5.2.1. Вычисление случайной последовательности импульсов e_t производится по формуле

$$e_t = P_t - \phi_1 P_{t+1} - \dots - \phi_r P_{t+r} + \theta_1 e_{t+1} + \dots + \theta_q e_{t+q} \,. \tag{44}$$

5.2.2. Вычисление значений временного ряда P_t для $t \le 0$ производится по формуле

$$P_t = e_t + \phi_1 P_{t+1} + \dots + \phi_r P_{t+r} - \theta_1 e_{t+1} - \dots - \theta_q e_{t+q} \,, \tag{45}$$

при $t = 0, -1, \dots, T$,

где $T = t$, при котором $|P_t| \le 0{,}01$; $e_{-t} = 0$, $t = 0{,}1, \dots, n$.

5.2.3. Вычисление последовательности a_t производится по формуле

$$a_t = P_t - \phi_1 P_{t-1} - \dots - \phi_r P_{t-r} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} \,, \tag{46}$$

при $t = T, \dots, 0{,}1, \dots, N - r$.

$a_{-t} = 0$ при $t < 1 - T$.

5.3. Вычисление последовательности a_{t_0} (блок А) производится для предварительных оценок параметров ϕ_i, $i = 1, \dots, r$; θ_j, $j = 1, \dots, q$, полученных при идентификации модели.

5.4. Вычисление последовательности a_{t_δ} (блок А) с одним возмущенным параметром производится по формуле

$$g_l' = g_l + \delta \,, \tag{47}$$

при $l = 1, \dots, (r + q)$,

где g_l - параметр модели.

5.5. Вычисление производной $y_{l,t}$ производится по формуле

$$y_{l,t} = \frac{a_{t_0} - a_{t\delta}}{\delta} \,, \tag{48}$$

при $t = T, \dots, N$,

$l = 1, \dots, (r + q)$.

5.6. Определение приращения производится по формуле

$$g_{пр_l} = \frac{\sum\limits_{t=1-T}^{N} (a_{t_0} \, y_{l,t})}{\sum\limits_{t=1-T}^{N} y_{l,t}^2} \,, \tag{49}$$

при $l = 1, \dots, (r + q)$.

5.7. Вычисление нового значения параметра производится по формуле

$$\bar{g}_l = g_l + g_{пр_l} \,. \tag{50}$$

Инв. № подлинника 4001 | № изв. | Инв. № дубликата | № изм.

5.8. Сходимость итеративной процедуры определяется из условия $|g_{пр_e}|>|\gamma|$ для $l = 1, \ldots, (r+q)$. Все параметры заменяются на вновь полученные и процедура вычисления последовательности a_{t_δ} повторяется.

В противном случае итеративная процедура считается завершенной, а полученные значения параметров с некоторой вероятностью считаются параметрами выбранной модели.

5.9. Определение доверительных интервалов по критерию наименьшей суммы квадратов

5.9.1. Вычисление последовательности a_t для полученных оценок параметров проводится в блоке А.

5.9.2. Вычисление минимальной суммы квадратов проводится по формуле

$$S_{min} = \sum_{t=1-T}^{N} a_t^2 . \tag{51}$$

5.9.3. Определение доверительного интервала оценок параметров проводится по формуле

$$S_{дов} = S_{min} \left\{ 1 + \frac{\chi_K^2}{N} \right\} . \tag{52}$$

5.10. Выходные данные:

- количественные оценки параметров математической модели временного ряда

$$\phi_i,\ i = 1, \ldots, r; \quad \theta_j,\ j = 1, \ldots, q;$$

- доверительный интервал оценок наименьших квадратов $S_{дов}$.

6. АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

6.1. Входные данные:

- число наблюдений временного ряда N;
- значения временного ряда $\{P_t\}$, $t = 1, \ldots, N$;
- вид и порядок модели временного ряда r, q, d;
- значения параметров модели $\bar{\phi}_i$, $i = 1, \ldots, r$; θ_j, $j = 1, \ldots, q$;
- величина, определяющая допустимое отклонение Q от соответствующего квантиля χ^2-распределения α.

6.2. Вычисление автокорреляционной функции остаточных ошибок

6.2.1. Вычисление коэффициентов φ производится по формуле

$$\varphi_j = \bar{\phi}_j + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \bar{\phi}_{j-i} \prod_{K=1}^{i} \left(\frac{d-K+1}{K} \right), \tag{53}$$

при $j = 1, \ldots, (r+q)$; $\varphi_0 = 1$; $\bar{\phi}_0 = -1$.

6.2.2. Вычисление коэффициентов ψ производится по формуле

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{r+d} \{ \varphi_i \psi_{j-i} \} - \bar{\theta}_j ; \tag{54}$$

для $j < 0$ $\quad \psi_j = 0$;

для $j > q$ $\quad \bar{\theta}_q = 0, \quad \psi_0 = 1.$

Вычисления продолжаются до выполнения условия

$$\psi_j \le 0{,}01. \tag{55}$$

6.2.3. Максимальная задержка автокорреляции равна индексу j при коэффициенте ψ, удовлетворяющему условию (55).

6.2.4. Вычисление последовательности остаточных ошибок a_t проводится в блоке А.

6.2.5. Вычисление автоковариаций остаточных ошибок производятся по формуле

$$K_\psi = j$$

$$C_{a_l} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-l} a_t a_{t+l} \tag{56}$$

$$l = 0, 1, \ldots, K_\psi.$$

6.2.6. Вычисление автокорреляций остаточных ошибок проводится по формуле

$$R_{a_l} = C_{a_l} / C_{a_0}, \tag{57}$$

при $l = 0, 1, \ldots, K_\psi$.

6.3. Проверка модели временного ряда по статистике Q

6.3.1. Вычисление статистики Q проводится по формуле

$$Q = N\sum_{l=1}^{K_\psi} R^2_{a_l}. \tag{58}$$

6.3.2. Определение числа степеней свободы проводится по формуле

$$U = K_\psi - r - q. \tag{59}$$

6.3.3. Проверка адекватности по величине Q производится по условию

$$Q < X_l - \alpha.$$

Если это условие выполняется, гипотеза об адекватности модели подтверждается. В противном случае вычисления прекращаются в связи с неадекватностью модели исходному временному ряду.

6.4. Проверка адекватности модели по верхней границе стандартной ошибки автокорреляции

6.4.1. Определение числа значений автокорреляций остаточных ошибок, превышающих стандартную ошибку автокорреляции, проводится по условию

$$|R_{a_l}| > \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{60}$$

при $l = 1, \ldots, K_\psi$.

Когда это условие выполняется, $N_a = N_a + 1$.

6.4.2. Сравнение полученного числа N_a с допустимым числом выбросов $N_g = K_\psi/3$ проводится по условию $N_a < N_g$.

Если условие выполняется, гипотеза об адекватности полученной модели по верхней границе стандартной ошибки автокорреляции подтверждается.

В противном случае вычисления прекращаются в связи с неадекватностью полученной модели исходному временному ряду.

№ изм. | № изв. | 4001 | Инв. № дубликата | Инв. № подлинника

6.5. Выходные данные:

- подтверждение или неподтверждение гипотезы об адекватности модели по статистике Q;

- подтверждение или неподтверждение гипотезы об адекватности модели по верхней границе стандартной ошибки автокорреляции.

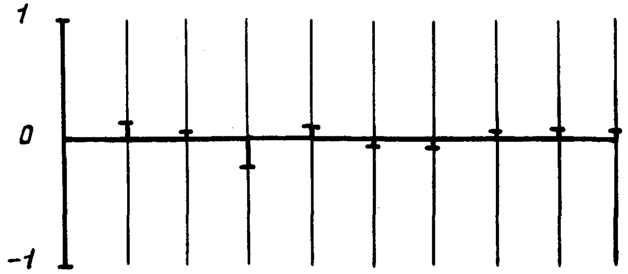
6.6. Блок-схемы алгоритмов построения математической модели временного ряда приведены в рекомендуемом приложении 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

Примеры выбора вида математической модели

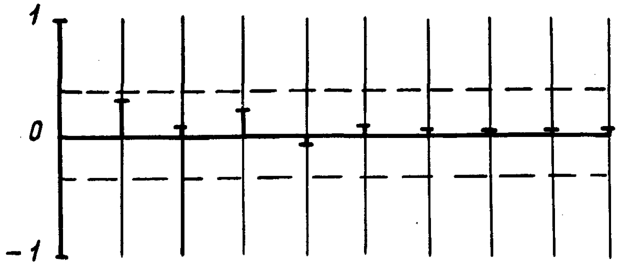
1. Модель "белый шум"

1.1. Спектр автокорреляционной функции приведен на черт. 1.



Черт. 1

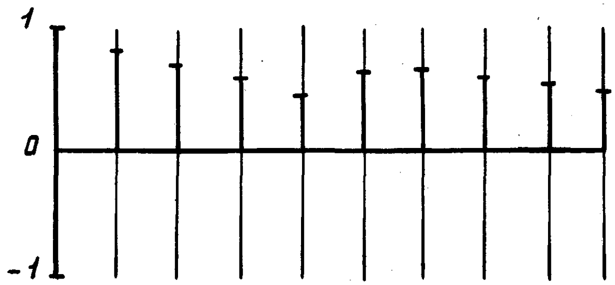
1.2. Спектр частной автокорреляционной функции приведен на черт. 2.



Черт. 2

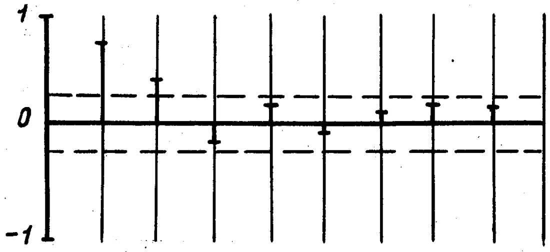
2. Модель авторегрессии 2-го порядка

2.1. Спектр автокорреляционной функции приведен на черт. 3.



Черт. 3

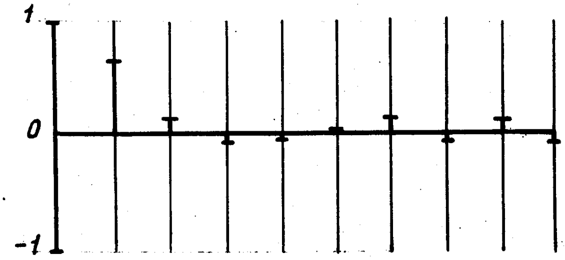
2.2. Спектр частной автокорреляционной функции приведен на черт. 4.



Черт. 4

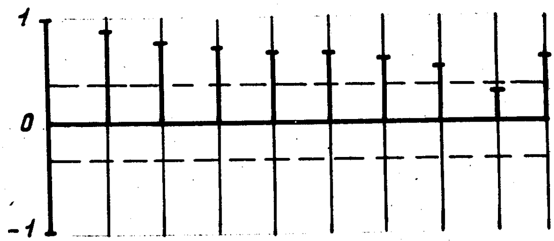
3. Модель скользящего среднего 1-го порядка

3.1. Спектр автокорреляционной функции приведен на черт. 5.



Черт. 5

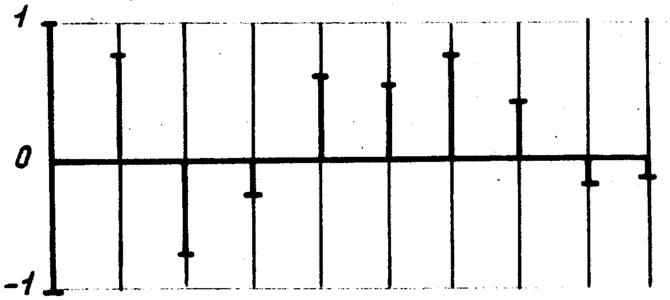
3.2. Спектр частной автокорреляционной функции приведен на черт. 6.



Черт. 6

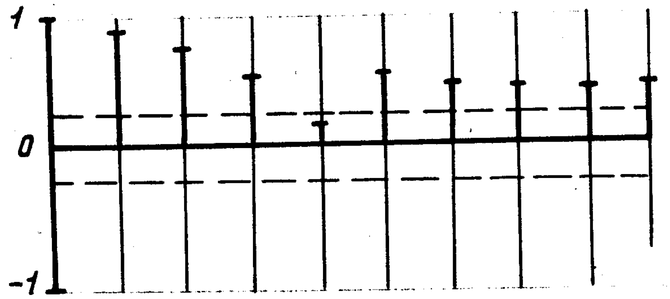
4. Смешанная модель авторегрессии – скользящего среднего

4.1. Спектр автокорреляционной функции приведен на черт. 7



Черт. 7

4.2. Спектр частной автокорреляционной функции приведен на черт. 8.

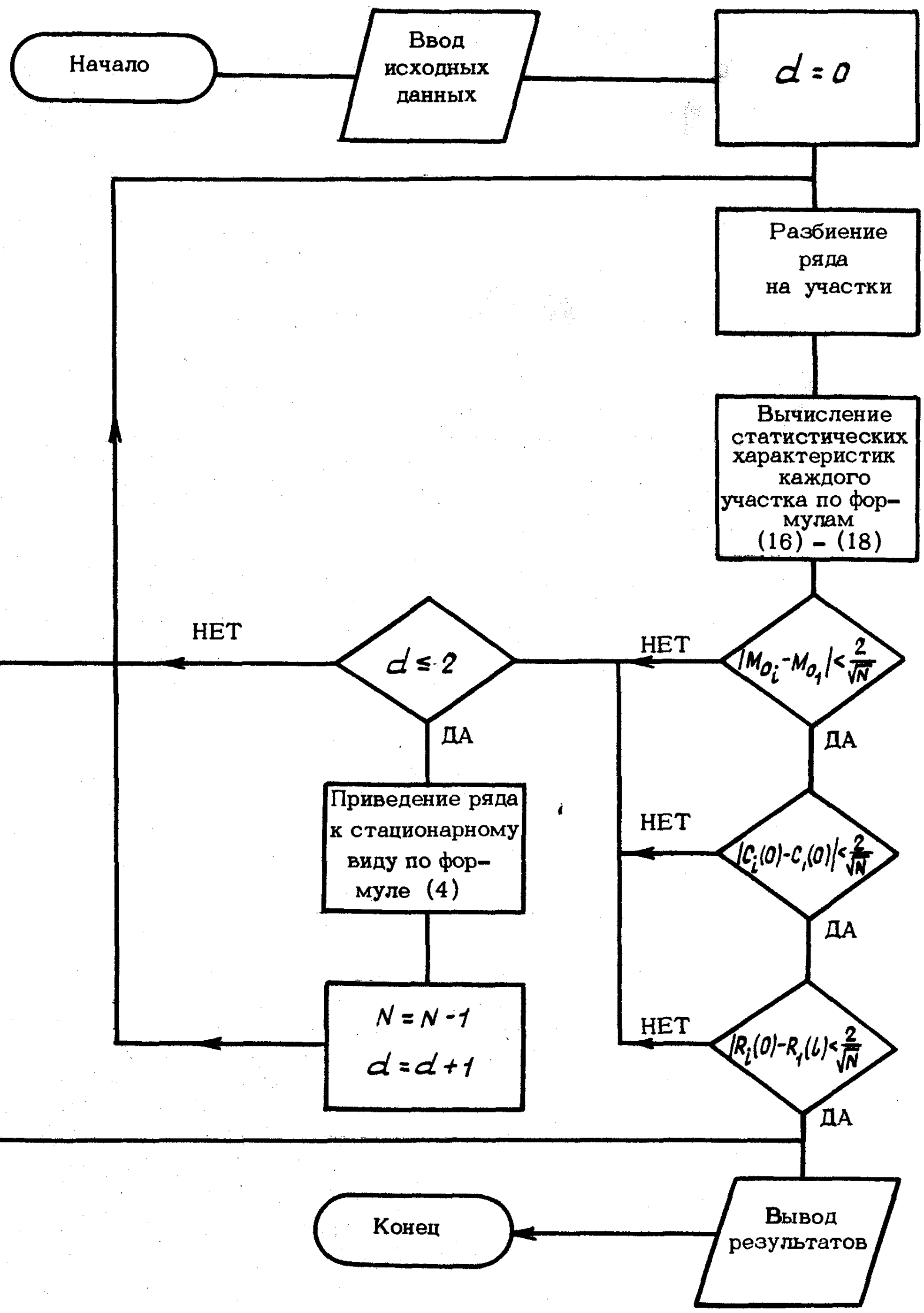


Черт. 8

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Рекомендуемое

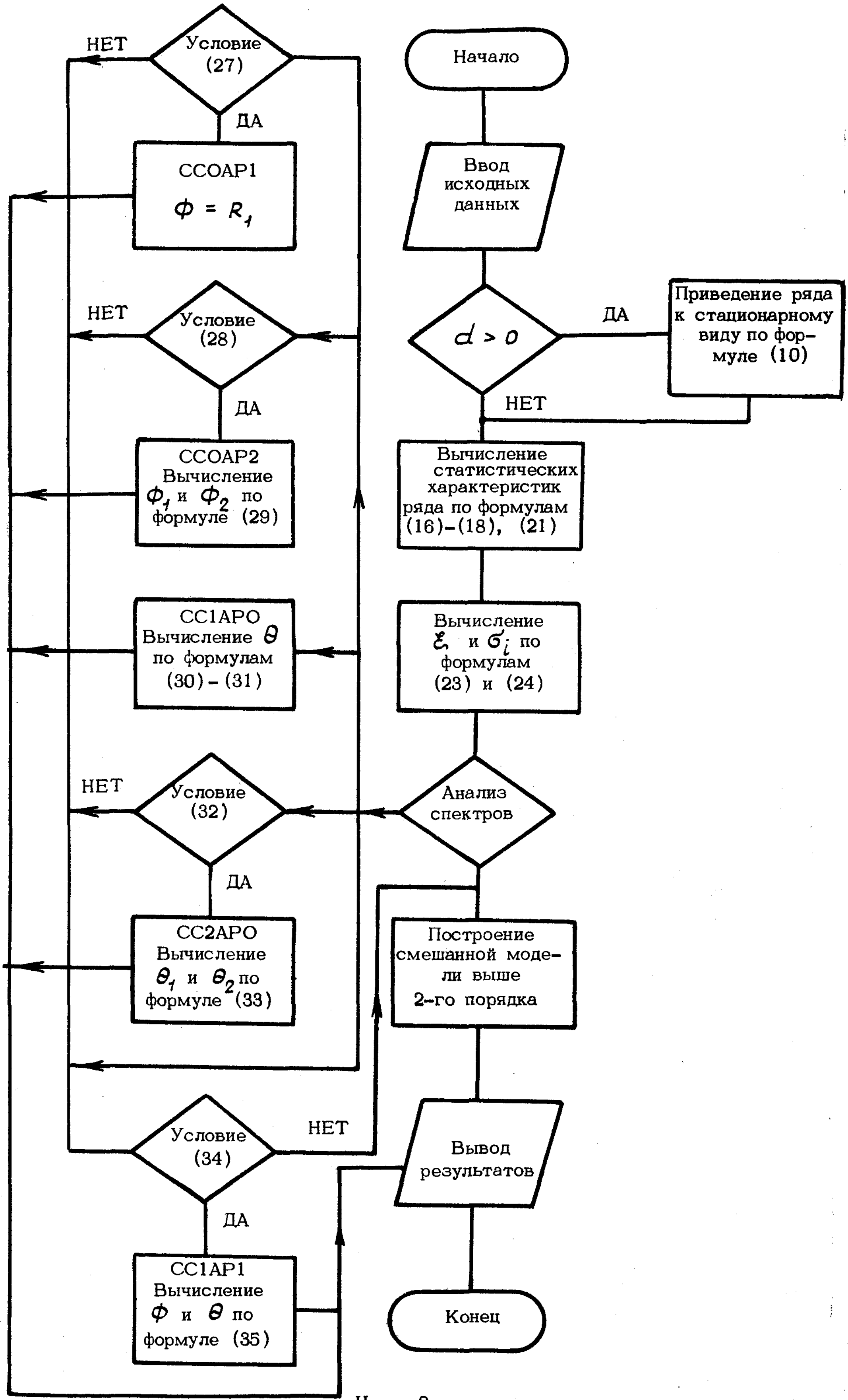
Блок-схемы алгоритмов построения математической модели временного ряда

1. Блок-схема алгоритма проверки ряда на стационарность приведена на черт. 1.



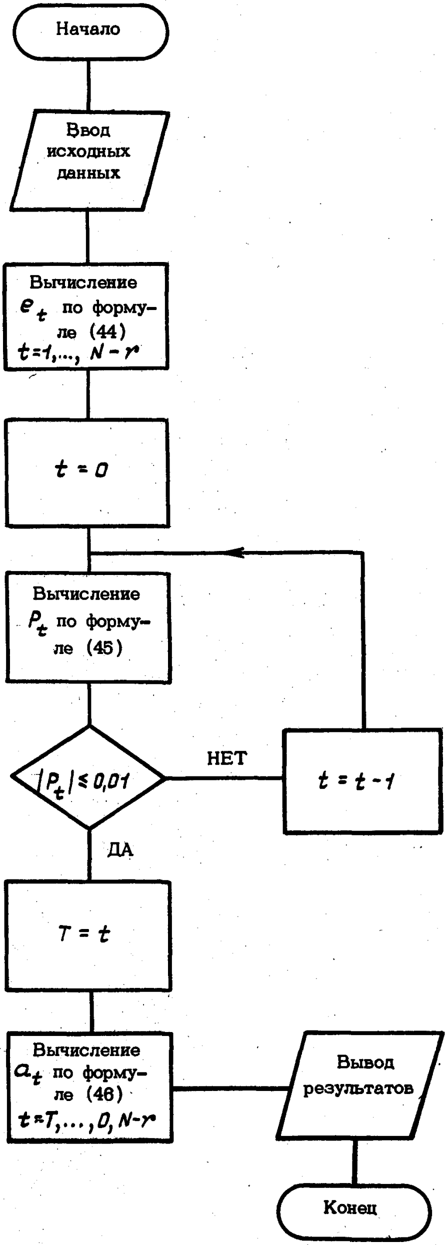
Черт. 1

2. Блок-схема алгоритма идентификации приведена на черт. 2.



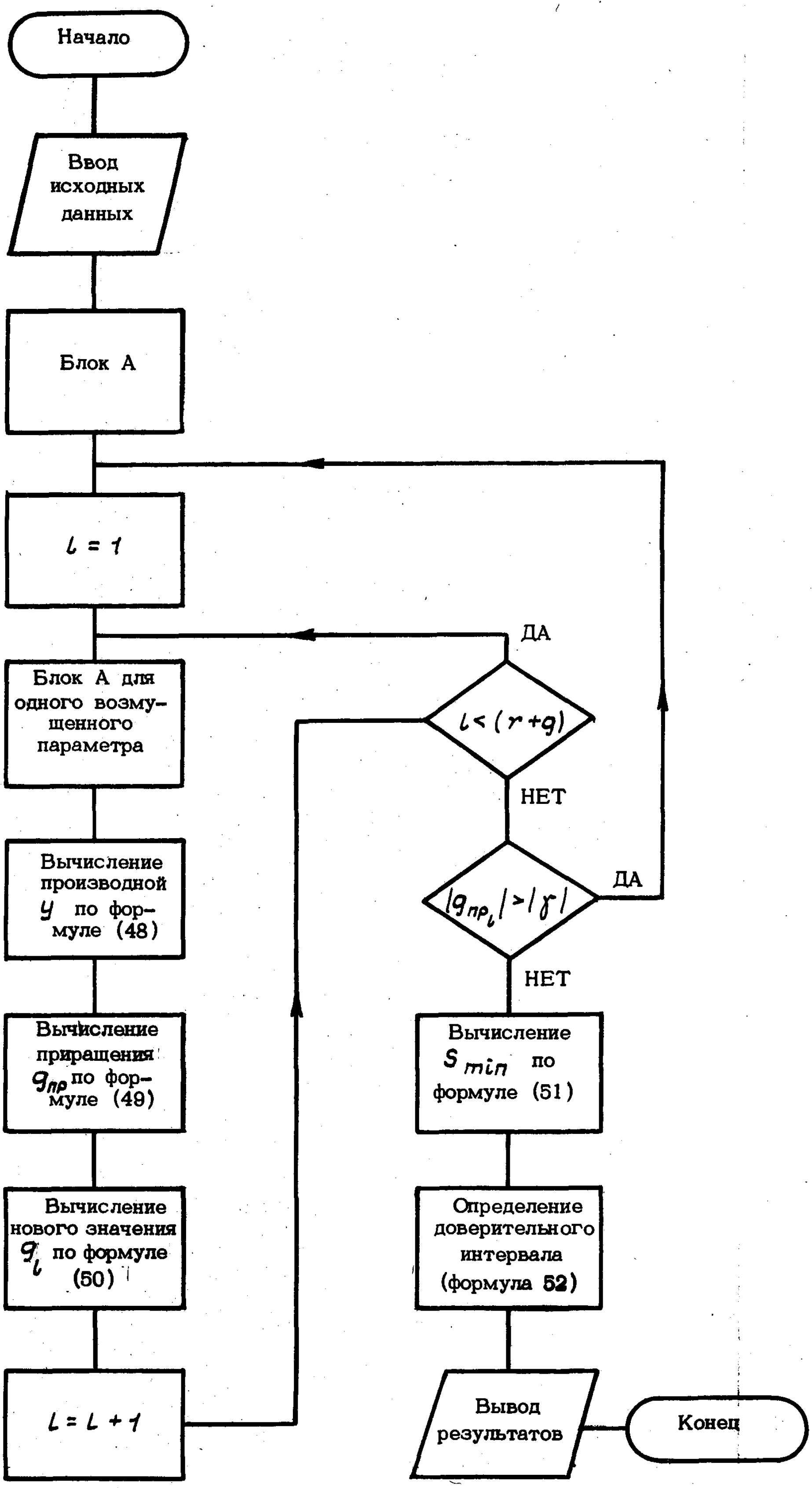
Черт. 2

3. Блок-схема вычисления последовательности случайных импульсов a_t (блок А) приведена на черт. 3.



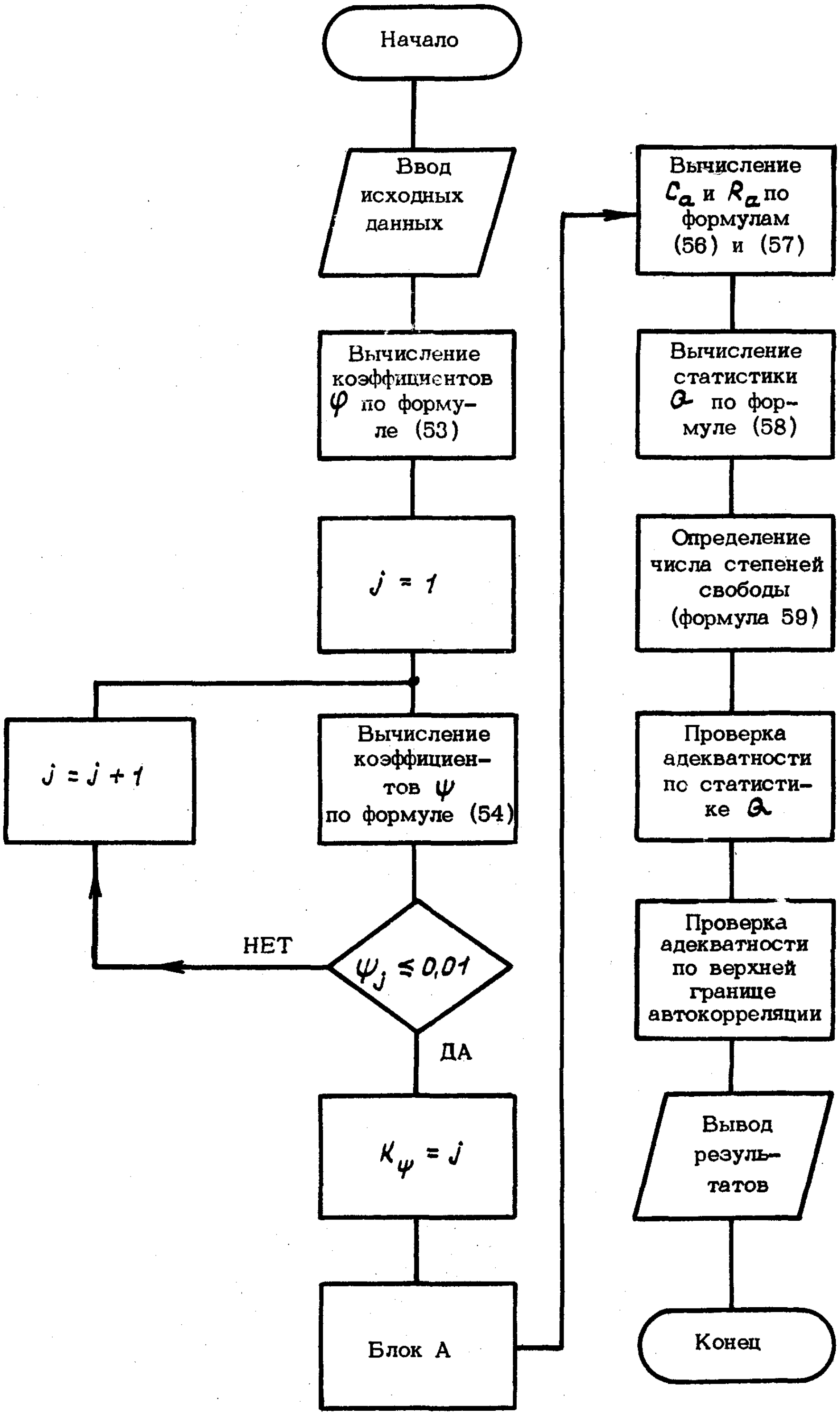
Черт. 3

4. Блок-схема алгоритма оценки параметров модели приведена на черт. 4.



Черт. 4

6. Блок-схема проверки адекватности модели приведена на черт. 5.



Черт. 5

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

№ изм.	Номера страниц: Изме-ненных	Заме-ненных	Новых	Анну-лиро-ванных	Номер "Изв. об изм."	Подпись	Дата	Срок введения изменения
1	1	—	—	—	9071	[signature]	22.05.84	01.07.84
2	1	—	—	—	9340	[signature]	3.12.85	

Инв. № подлинника 4001