УДК 658.562.014:65.011.56 Группа Т59

# ОТРАСЛЕВОЙ СТАНДАРТ

**ОСТ 1 00358-80**

## ОТРАСЛЕВАЯ АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПОДСИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

## Методика оценки оптимальных значений показателей

На 20 страницах

Введен впервые

Распоряжением Министерства от 20 июня 1980 г. № 087-16 срок введения установлен с 1 июля 1981 г.

Настоящий стандарт устанавливает метод оценки оптимальных значений показателей качества в отраслевой автоматизированной системе управления (ОАСУ). Поиск оптимальных значений показателей основан на методе случайного поиска.

№ изм. | № изв.

Инв. № дубликата | Инв. № подлинника 4463

Издание официальное ★ ГР 8180073 от 30.10.80

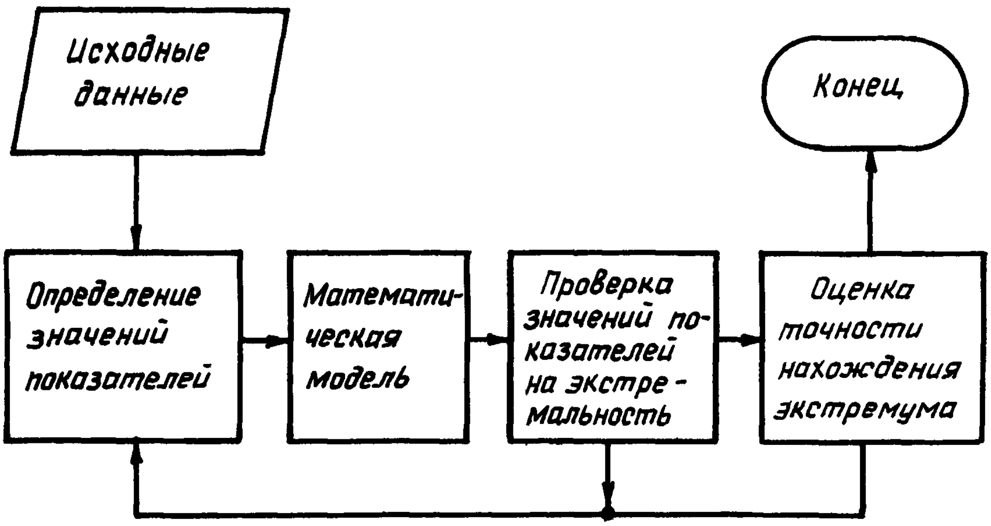
Метод позволяет решать условные и безусловные оптимизационные задачи с критериальной функцией и ограничениями произвольного характера.

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Процесс определения оптимальных значений показателей методом случайного поиска представляет собой итеративную процедуру нахождения оценок данных показателей (вектора-аргумента $\bar{X}$), соответствующих экстремальному (минимальному или максимальному) значению критерия $Q$.

Поиск экстремальных значений вектора-аргумента $\bar{X} = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$, ($n$ - число показателей) осуществляется в некоторой области $D$ конечного $n$-мерного эвклидова пространства.

Укрупненная блок-схема процедуры поиска оптимальных значений показателей приведена на чертеже.




1.2. Применение метода случайного поиска рекомендуется:

- при решении оптимизационных задач с вероятностным характером управляемого процесса, поиск точного решения которых нецелесообразен;
- при решении оптимизационных задач, математические модели которых имеют сложную (нелинейную) структуру, большое число переменных ($N \geq 10$) или малое число переменных ($N < 10$) (при условии, что время решения последних должно быть не менее 1,5-3 с).

1.3. Построение математической модели оптимизационной задачи состоит в математическом описании критериальной функции $Q(\bar{X})$, соответствующей выбранному критерию $Q$ и области поиска $D$. Вопросы построения математической модели в настоящем стандарте не рассматриваются.

№ изм. | № изв. | 4483 | Инв. № дубликата | Инв. № подлинника

1.4. Математические модели, описывающие соответствующие задачи управления качеством и надежностью, могут иметь произвольную структуру критериальной функции

$$Q = Q(\bar{X}), \tag{1}$$

и систему ограничений, определяющую область поиска $D$

$$D: \begin{cases} \bar{X}_{min} \leq \bar{X} \leq \bar{X}_{max} \\ g_h(\bar{X}) \geq 0; \quad h = \overline{1,m}; \quad m \leq n, \end{cases} \tag{2}$$

где $m$ – число функциональных ограничений;

$\bar{X}_{min}$, $\bar{X}_{max}$ – минимальное и максимальное значение вектора-аргумента $\bar{X}$.

1.5. Пользователь при решении конкретной оптимизационной задачи должен:

- сформулировать задачу управления, построить математическую модель и записать ее на алгоритмическом языке;
- сформировать исходные данные с учетом значений соответствующих операторов FORMAT и DIMENSION;
- ввести укомплектованную программу в ЭВМ.

## 2. АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

### 2.1. Исходные данные

2.1.1. При реализации алгоритма используется система следующих исходных данных в виде массивов, констант и переменных:

$XO(J,I)$, $XM(J,I)$, $XN(J,I)$, $W(J,I)$, $D(J,I)$, $VS(J,I)$, $S_1(J,I)$, $KI$, $KM$, $L$, $IX$, $NN$, $N1$, $NT$, $NQ$, $NS$, $DN$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$, $D_5$, $D_6$, $D_7$.

2.1.2. При формировании массивов, определяющих характер переменных и область допустимых значений, необходимо учитывать характер решаемой задачи оптимизации.

Если решается задача типа оптимального проектирования, т.е. если каждой переменной (например, интенсивности отказов, периодичности проверок и т.п.) поставлен ряд функциональных частей оптимизируемой системы (например, автопилот, блок радиоуправления и т.д.), то индексы $I$ и $J$ имеют следующее содержание:

$I$ – индекс вида переменной;

$J$ – индекс функциональных частей системы, самостоятельно исследуемых в задаче оптимизации.

Если решается динамическая задача оптимизации, то индексы $I$ и $J$ имеют следующее содержание:

Инв. № дубликата

Инв. № подлинника 4463

№ изм.

$I$ - индекс вида переменной;

$J$ - индекс интервала времени.

В остальных оптимизационных задачах значение индекса $J$ принимается равным единице.

$XO(J,I)$ - массив значений координат исходной точки (любое значение вектора-аргумента $\bar{X}$, принадлежащее области допустимых значений, определяемой совокупностью простых и функциональных ограничений).

$XM(J,I)$, $XN(J,I)$ - массивы максимальных и минимальных значений переменных, определяющих область допустимых значений.

$W(J,I)$ - массив признаков, определяющих тип переменной (непрерывной управляемой переменной соответствует признак 1, дискретной управляемой переменной соответствует признак 0).

При необходимости малочувствительные управляемые переменные в модели могут быть заменены на константы.

Данное преобразование осуществляется путем присвоения соответствующему элементу массива $W(J,I)$ значения, равного 0,5.

$D(J,I)$ - массив шагов дискретности управляемых дискретных переменных (шаги дискретности для соответствующей $I$-й переменной могут быть одинаковыми и различными по $J$).

Массив шагов дискретности $D(J,I)$ заполняется только для дискретных переменных, остальным переменным в массиве соответствуют пробелы, которые в ЭВМ реализуются в нули.

$VS(J,I)$ - массив признаков, определяющих различие или единство значений $I$-й переменной по $J$ (признак 0 соответствует переменной, имеющей различные значения по $J$, признак 10 соответствует переменной, имеющей единое значение по $J$).

$S_1(J,I)$ - массив коэффициентов масштаба (начальное значение коэффициентов масштаба для всех переменных равно 2).

2.1.3. Значения констант и переменных назначаются в пределах указанных диапазонов в зависимости от характера задачи оптимизации и требуемой точности решения:

$NN$ - заданное число шагов поиска экстремума ($NN \approx 300 \div 2000$);

$KI$ - общее число управляемых переменных и констант, определяющее размерность исходного массива;

$KM$ - общее число управляемых переменных (в частном случае $KM$ равняется $KI$);

$L$ - предельное число функционально самостоятельных частей системы (при отсутствии этих частей $L$ =1);

$IX$ - константа, используемая при генерации равномерно распределенных случайных чисел ($IX$ =71253);

$S_2$ - константа, характеризующая быстроту сходимости поиска ($S_2 \approx 0{,}05 \div 0{,}1$);

Инв. № подл. 4463 | Взам. инв. № | Инв. № дубл. | № изм. | № изв.

$S_3$ – константа, определяющая максимальное значение коэффициентов масштаба по всем координатам (величина $S_3$ определяется требованием точности поиска и изменяется в диапазоне от 10 до 100);

$S_4$ – константа, определяющая меру близости экстремальных оценок (величина $S_4$ определяется требованием к быстроте сходимости и изменяется в диапазоне от 0,05 до 0,1);

$NT$ – число случайных исходных точек поиска в области допустимых значений переменных ($NT \geqslant 1$);

$N_1$ – число неэффективных шагов поиска, после которых осуществляется изменение коэффициентов масштаба ($N_1 \approx 50 \div 100$);

$NQ$ – число случайных пробных шагов при оценке статистического градиента критериальной функции;

$D_1$ – константа, определяющая величину пробных шагов при оценке статистического градиента критериальной функции ($D_1 \approx 0{,}005$);

$D_2$ – константа, определяющая величину рабочих шагов по соответствующим координатам при градиентном поиске ($D_2 \approx 0{,}05 \div 0{,}1$);

$D_3$ – коэффициент роста направленных шагов поиска ($D_3 \approx 1{,}1 \div 1{,}3$);

$NS$ – число направленных шагов поиска, после которых осуществляется увеличение коэффициента роста направленных шагов поиска $D_3$ ($NS \approx 2 \div 5$);

$DN$ – константа, определяющая меру увеличения коэффициента $D_3$ ($DN \approx 1{,}2 \div 2$);

$D_4$ – коэффициент уменьшения направленных шагов поиска ($1 < D_4 < D_3$);

$D_5$ – константа, определяющая наличие или отсутствие функциональных ограничений (1 – наличие ограничений, 0 – отсутствие ограничений);

$D_6$ – константа, определяющая характер экстремальной задачи (0 – задача минимизации, 1 – задача максимизации);

$D_7$ – константа, определяющая величину уменьшения рабочих шагов при градиентном поиске ($D_7 \approx 0{,}005 \div 0{,}01$).

2.2. Процесс случайного поиска

2.2.1. Поиск оптимальных значений показателей начинается с исходной точки поиска $\bar{X}_0$ с координатами $XO(J,I)$ и значением критериальной функции $\hat{Q} = \hat{Q}(\bar{X}_0)$.

2.2.2. Величина случайного $K$-го шага поиска определяется выражением

$$\bar{X}_K = \bar{X}^*_{K-1} + \bar{\Delta}_K , \qquad (3)$$

где $\bar{X}^*_{K-1}$ – значение вектора-аргумента, соответствующего найденной оценке экстремального значения критериальной функции за ($K$-1)-шагов поиска (исходное значение $\bar{X}^*$ принимается равным $\bar{X}_0$);

$\bar{\Delta}_K$ – значение случайного $K$-го приращения вектора-аргумента.

2.2.3. Величина случайного $K$ -го приращения вектора-аргумента определяется выражением

$$\bar{\Delta}_K = \bar{a}\bar{\xi}_K, \tag{4}$$

где $\bar{a}$ – $q$-мерный вектор длины шага поиска $\bar{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1KM};$
$a_{21}, \dots, a_{ji}, \dots, a_{LKM});$

$a_{ji}$ – длина шага поиска по $j, i$ -й координате.

При этом $a_{ji}$ определяется выражением

$$a_{ji} = \frac{1}{S_1(J,I)}\left(XM(J,I) - XN(J,I)\right). \tag{5}$$

$\bar{\xi}_K$ – $K$ -е значение $q$ -мерного случайного нормированного вектора, равномерно распределенного по всем направлениям пространства оптимизируемых показателей

$$\bar{\xi}_K = (\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1KM}; \xi_{21}, \dots, \xi_{ji}, \dots, \xi_{LKM}),$$

где $\xi_{ji}$ – случайное нормированное значение $j, i$ координаты, равномерно распределенной в интервале $[-1,1]$. При этом $\xi_{ji}$ определяется выражением

$$\xi_{ji} = \frac{\xi^{o}_{ji}}{\sqrt{\sum\limits_{1}^{q}(\xi^{o}_{ji})^2}}, \tag{6}$$

где $\xi^{o}_{ji}$ – случайное число, равномерно распределенное в интервале $[-1,1]$, получаемое методом функциональных преобразований случайных чисел $\xi^{*}_{ji}$, случайно распределенных в интервале $[0,1]$ в соответствии с выражением

$$\xi^{o}_{ji} = 2 \cdot \xi^{*}_{ji} - 1. \tag{7}$$

2.2.4. Размерность векторов $\bar{a}$ и $\bar{\xi}_K$ определяется выражением

$$q = L\,KM - \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{KM}\varkappa_{ji} - \sum_{i=1}^{KM} SVS_i, \tag{8}$$

при этом

$$\varkappa_{ji} = \begin{cases} 1, \text{ если } W(J,I) = 0{,}5 \\ 0, \text{ если } W(J,I) = 1 \vee 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$SVS_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{L} f_{ji} - 1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{L} f_{ji} > 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{L} f_{ji}, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{L} f_{ji} \le 1. \end{cases} \tag{10}$$

## 2.3. Проверка случайного шага поиска на экстремальность

2.3.1. Проверка случайного шага поиска на экстремальность осуществляется путем проверки неравенств

$$\hat{Q}_K - Q^{*} < 0 \quad \text{(при минимизации)},$$
$$\hat{Q}_K - Q^{*} > 0 \quad \text{(при максимизации)}, \tag{11}$$

Инв. № дубликата | Инв. № подлинника 4488 | Взам. инв. № | Инв. № дубл.

где $\hat{Q}_K$ – текущее значение критериальной функции на $K$–ом шаге поиска;

$Q^*$ – оценка экстремального значения критериальной функции, найденной за $(K-1)$ шагов поиска.

2.3.2. Если соответствующее неравенство выполняется, то осуществляется операция присвоения

$$\bar{X}^* = \bar{X}_K \quad \text{и} \quad Q^* = \hat{Q}_K , \tag{12}$$

и начинается процесс направленного поиска, в противном случае продолжается случайный поиск.

2.4. Процесс направленного поиска

2.4.1. Направленное приращение вектора-аргумента определяется выражением

$$\bar{\Delta} d_N = \bar{\Delta} d_{N-1} \; D_3 , \tag{13}$$

где $d_N$ – число направленных шагов.

Если $d_N = 1$, то

$$\bar{\Delta} d_{N-1} = \bar{\Delta}_K , \tag{14}$$

где $\bar{\Delta}_K$ – случайное значение приращения вектора-аргумента, соответствующее последней экстремальной оценке, найденной случайным поиском.

2.4.2. Если число удачных направленных шагов $d_N > NS$, то осуществляется увеличение коэффициента роста направленного приращения вектора-аргумента

$$D_3 = D_3 \cdot DN . \tag{15}$$

2.4.3. Процесс направленного движения в пространстве оптимизируемых показателей осуществляется до первого неудачного шага (направленный шаг, для которого не выполняется условие экстремальности оценки).

2.4.4. Если число $d_N > 1$, то после неудачного шага осуществляется обратный направленный шаг, значение которого определяется выражением

$$\bar{X}_{d_{N+2}} = \bar{X}_{d_N} - \frac{\bar{\Delta} d_{N+1}}{D_4} \tag{16}$$

Если $d_N = 1$, обратный направленный шаг не осуществляется и начинается градиентный поиск.

2.5. Процесс градиентного поиска

2.5.1. При градиентном поиске оценка направления движения в пространстве оптимизируемых показателей осуществляется путем статистической оценки градиента критериальной функции в окрестности последнего значения $\bar{X}^*$.

2.5.2. Статистическая оценка градиента осуществляется двумя способами:

– если число оптимизируемых показателей невелико ($q \leq 10$), то оценка градиента осуществляется методом центральной пробы по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{g} \left[ Q(\bar{X}^* + g \bar{l}) - Q(\bar{X}^*) \right] , \tag{17}$$

№ изм. | № изв. | Инв. № дубликата | Инв. № подлинника 4463 где $\bar{g}$ - вектор значений пробных шагов;

$\bar{l}$ - вектор координатных орт;

- если число оптимизируемых показателей велико ($q > 10$), то оценка градиента осуществляется методом непарных проб относительно среднего

$$\bar{\lambda} = \sum_{h=1}^{NQ} (\bar{\xi}_h - \bar{\xi}_{cp}) [Q(\bar{X}^* + \bar{\xi}_h) - Q_{cp}] , \qquad (18)$$

при этом

$$\bar{\xi}_{cp} = \frac{1}{NQ} \sum_{h=1}^{NQ} \bar{\xi}_h ; \quad Q_{cp} = \frac{1}{NQ} \sum_{h=1}^{NQ} Q(\bar{X}^* + \bar{\xi}_h) , \qquad (19)$$

где $\bar{\xi}_h$ - случайные значения вектора-аргумента, равномерно распределенные в пространстве оптимизируемых переменных, ограниченного по каждой координате интервалом $[-g, g]$.

Величина $g$ определяется выражением

$$|g| = D_1 [XM(J,I) - XN(J,I)] . \qquad (20)$$

2.5.3. Величина градиентного шага по каждой координате определяется выражением

$$Xd_r(J,I) = X^*(J,I) + \Delta d_r(J,I) . \qquad (21)$$

Здесь

$$\Delta d_r(J,I) = a \frac{\lambda(J,I)}{\sqrt{\sum_{1}^{q} [\lambda(J,I)]^2}} D_2 \left( \frac{XM(J,I) - XN(J,I)}{S_1(J,I)} \right) . \qquad (22)$$

Величина константы $a$ равна -1 при решении задачи минимизации критериальной функции и +1 при решении задачи максимизации критериальной функции.

2.5.4. После первого неудачного градиентного шага осуществляется процедура оценки положения экстремума в области $\bar{X}^* \div (\bar{X}^* + \Delta d_r)$ относительно точки пространства, определяемого координатами вектора $\bar{X}^*$.

Данная процедура основывается на принципах дихотомии и состоит из следующих операций:

- определения нового значения приращения путем деления пополам приращения $\Delta d_r$

$$\bar{\Delta} d_g = \frac{\bar{\Delta} d_r}{2} , \qquad (23)$$

где $d_g$ - порядковый номер процедуры дихотомии;

- оценки значения критериальной функции в точке оптимизируемого пространства с координатами

$$\bar{X} d_g = \bar{X}^* + \bar{\Delta} d_g . \qquad (24)$$

Инв. № подлинника 4463 · Инв. № дубликата · № изв. · № изм.

Если $\Delta Q < 0$ (для задачи минимизации), то $\bar{X}^* = \bar{X}d_g$ и повторяется операция деления $\bar{\Delta}d_g$ относительно нового значения $\bar{X}^*$.

Если $\Delta Q > 0$, то значение вектора $\bar{X}^*$ не пересчитывается и операция деления $\bar{\Delta}d_g$ осуществляется относительно исходного значения $\bar{X}^*$.

Данная процедура оценки положения экстремума прекращается после того, как выполнится условие

$$\bar{\Delta}d_g < D_7\,(\overline{XM} - \overline{XN}). \qquad (25)$$

2.6. Итеративный пересчет коэффициентов масштаба зоны поиска

2.6.1. Изменение коэффициентов масштаба зоны поиска осуществляется после выполнения неравенства

$$K8 > N1, \qquad (26)$$

где $K8$ – число случайных шагов поиска после последнего резкого изменения положения оценки экстремума критериальной функции в пространстве оптимизируемых переменных.

В качестве меры резкого изменения оценки экстремума критериальной функции используется неравенство

$$|Q^*_{\varkappa} - Q^*_{\varkappa-1}| > S_2\,Q^*_{\varkappa}, \qquad (27)$$

где $\varkappa$ – индекс порядкового номера найденной экстремальной оценки критериальной функции.

При изменении масштаба зоны поиска учитывается величина и взаимное положение оценок экстремума, полученные в процессе поиска.

2.6.2. Остановка поиска осуществляется при выполнении одного из двух неравенств

$$K > NN, \quad AMIN > S_3, \qquad (28)$$

где $K$ – общее число случайных шагов поиска;

$AMIN$ – минимальное значение коэффициента масштаба зоны поиска в пространстве оптимизируемых показателей.

2.7. Выходные данные

2.7.1. Выходными данными алгоритма являются:

$CB$ – конечное значение экстремальной оценки критериальной функции (в случае поиска экстремума критериальной функции с различных исходных точек поиска на печать выводятся все конечные значения экстремума, соответствующие каждой исходной точке поиска);

$CX(J,I)$ – массив оптимальных значений показателей (переменных), соответствующих конечному значению экстремальной оценки критериальной функции.

Кроме этого на печать выводятся все исходные данные.

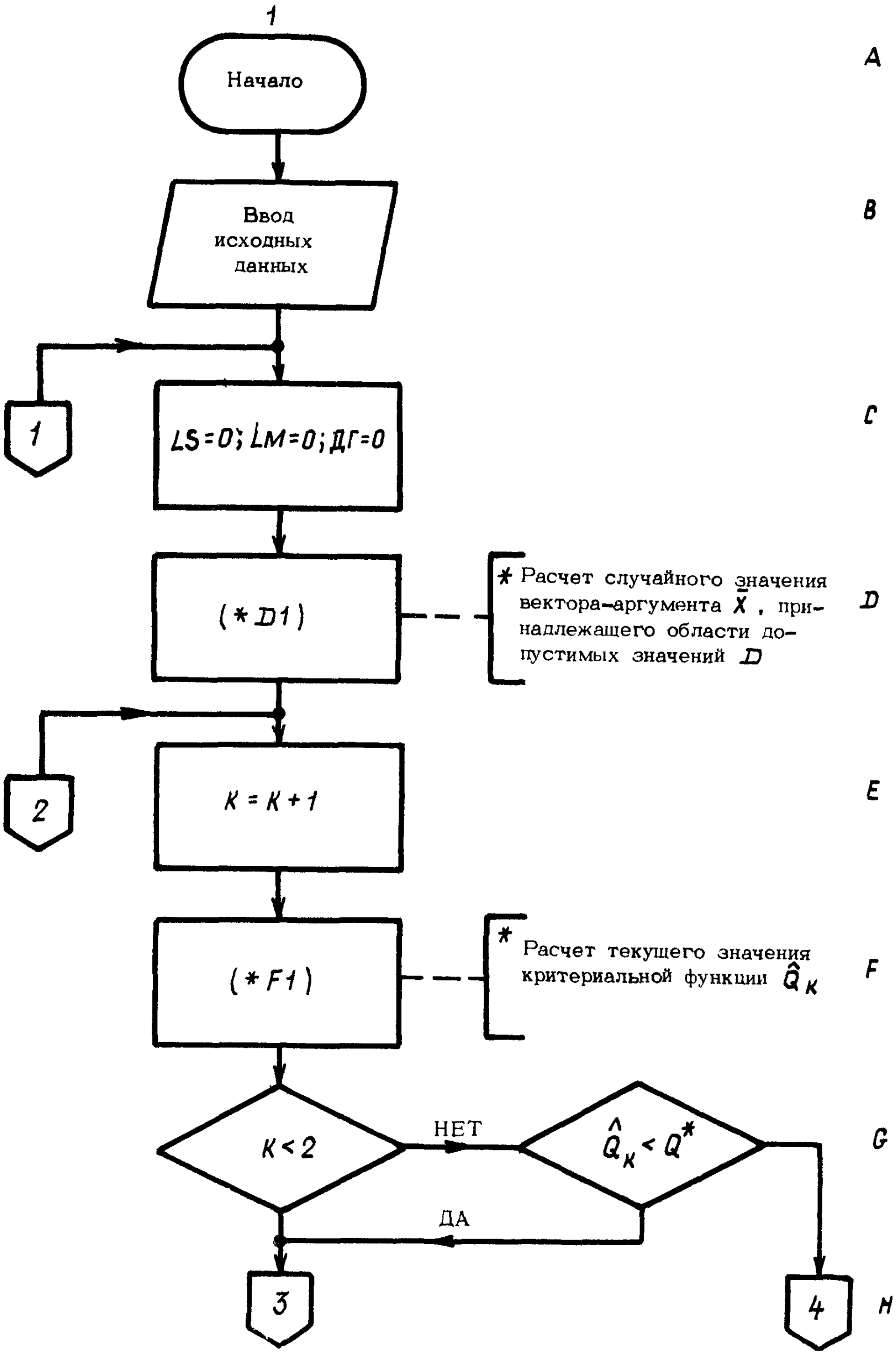
2.8. Блок-схема алгоритма поиска оптимальных значений показателей приведена в рекомендуемом приложении 1.

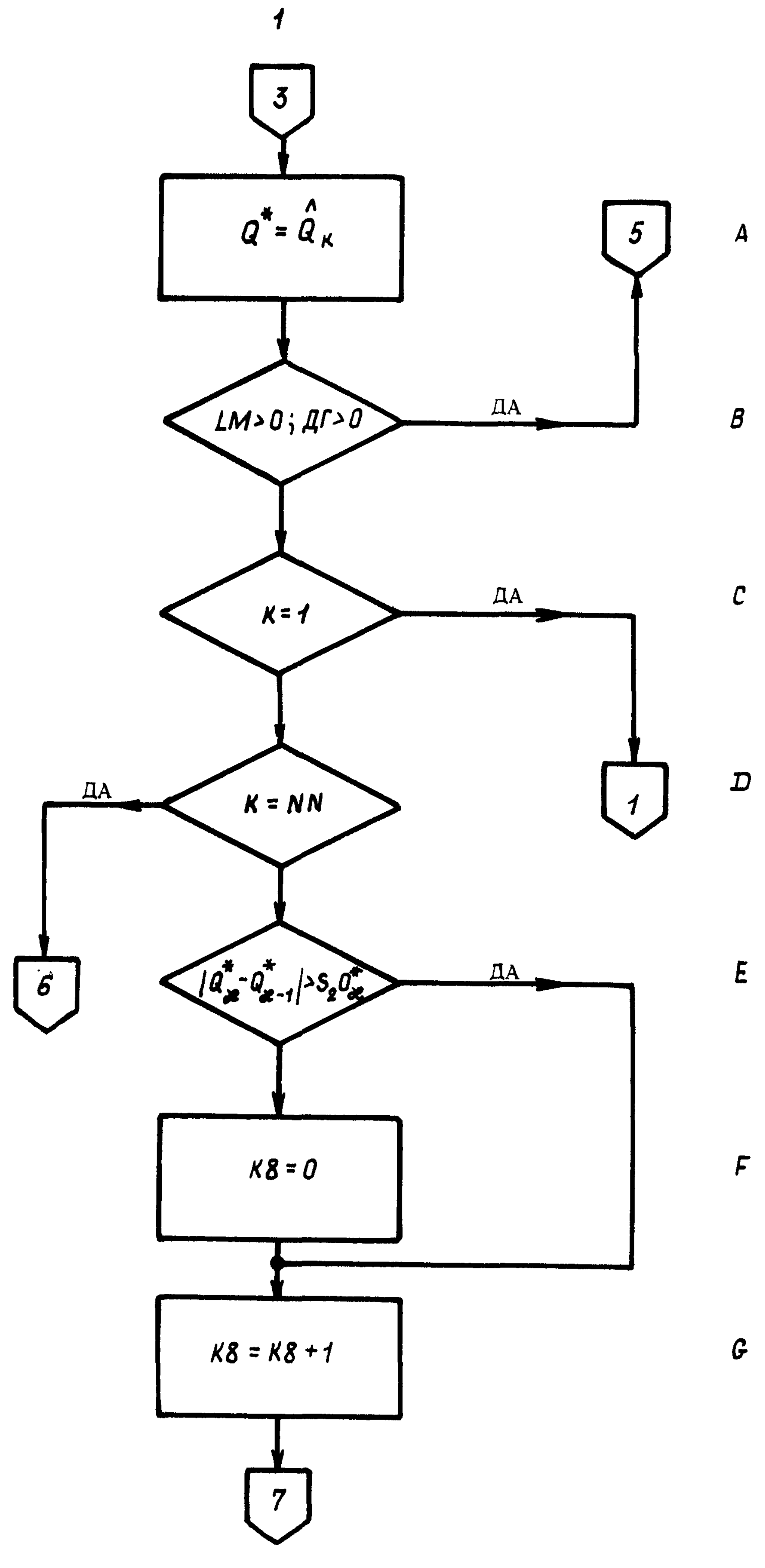
2.9. Примеры использования алгоритма поиска оптимальных значений показателей приведены в справочном приложении 2.

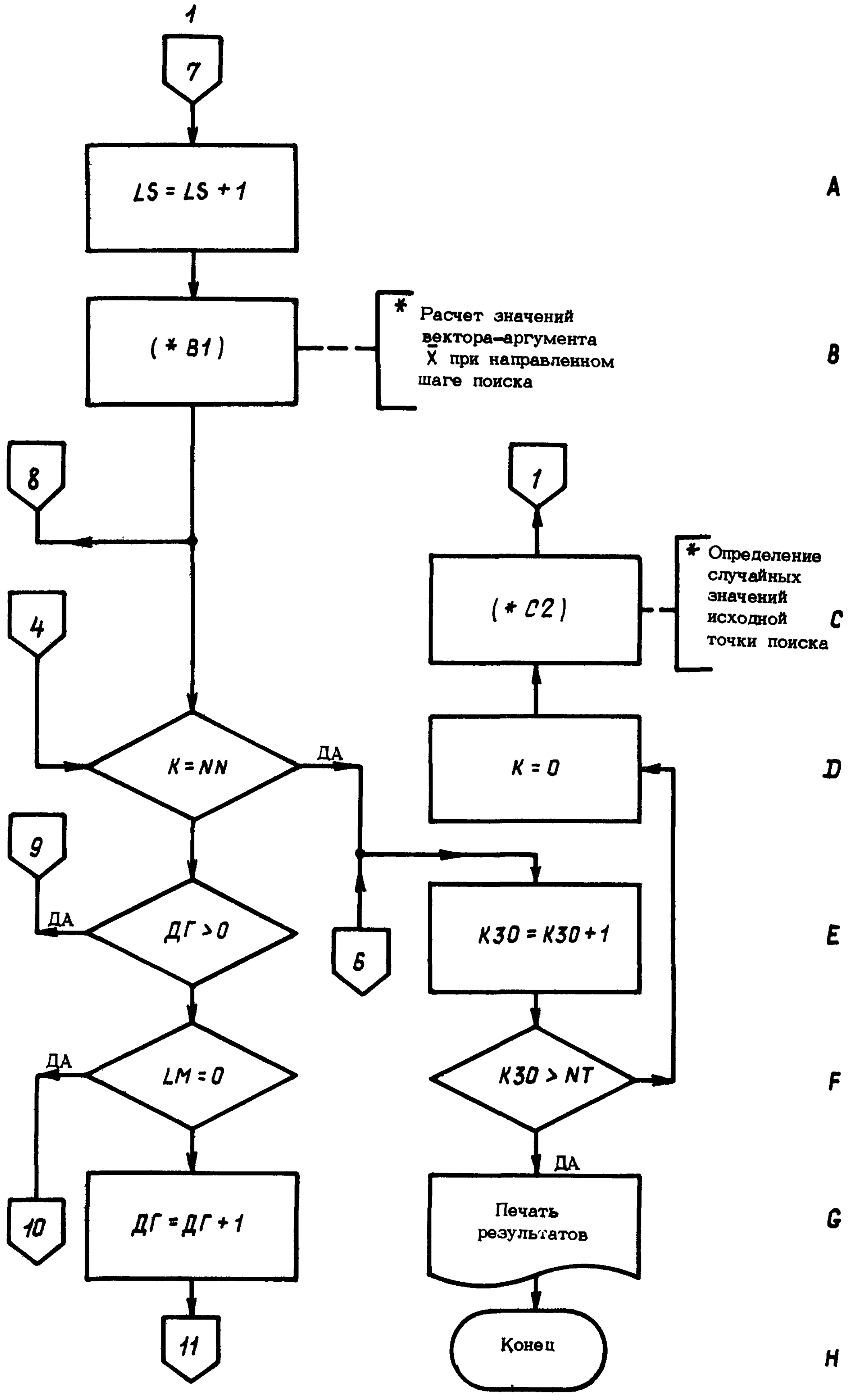
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

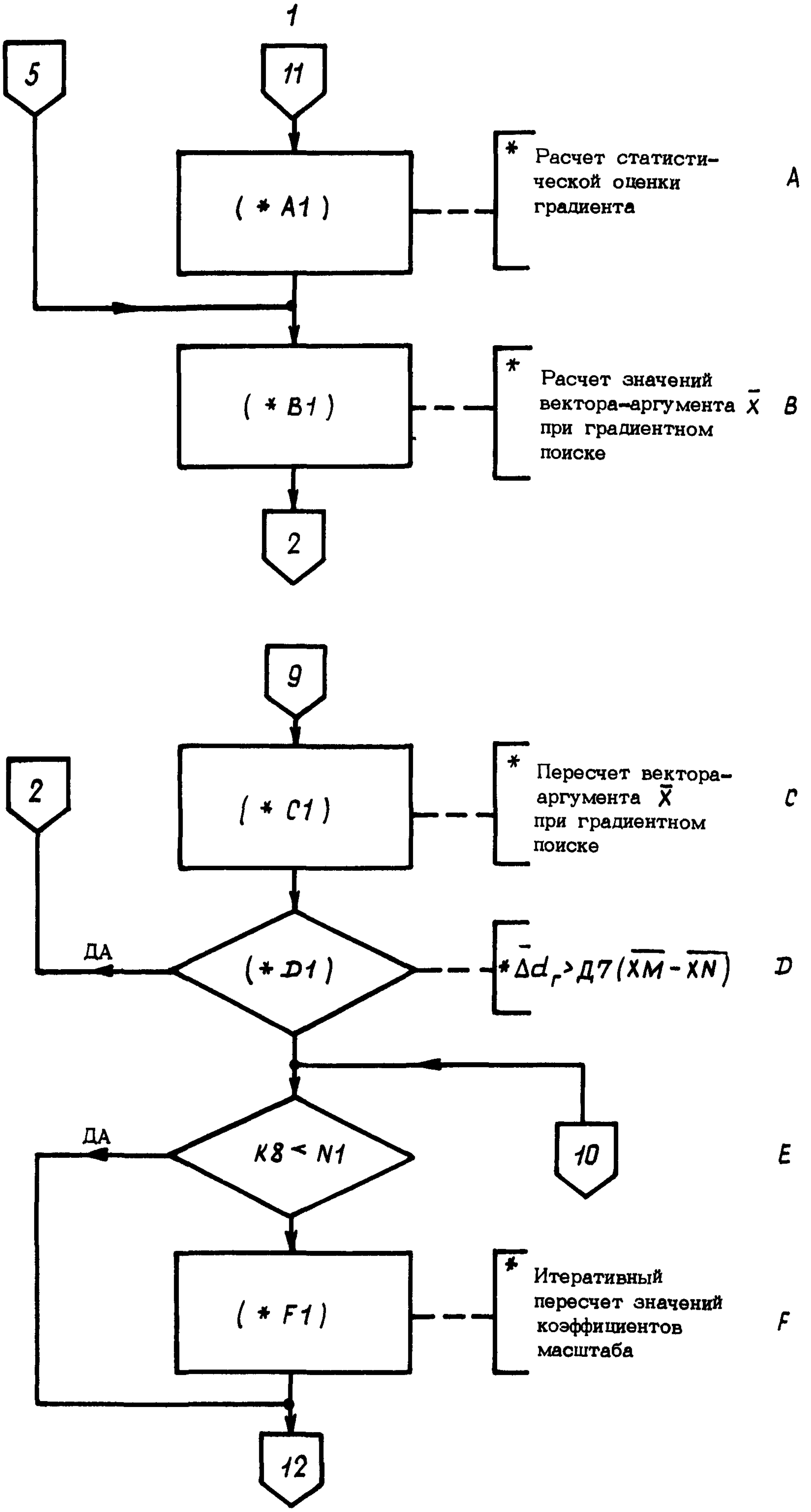
Рекомендуемое

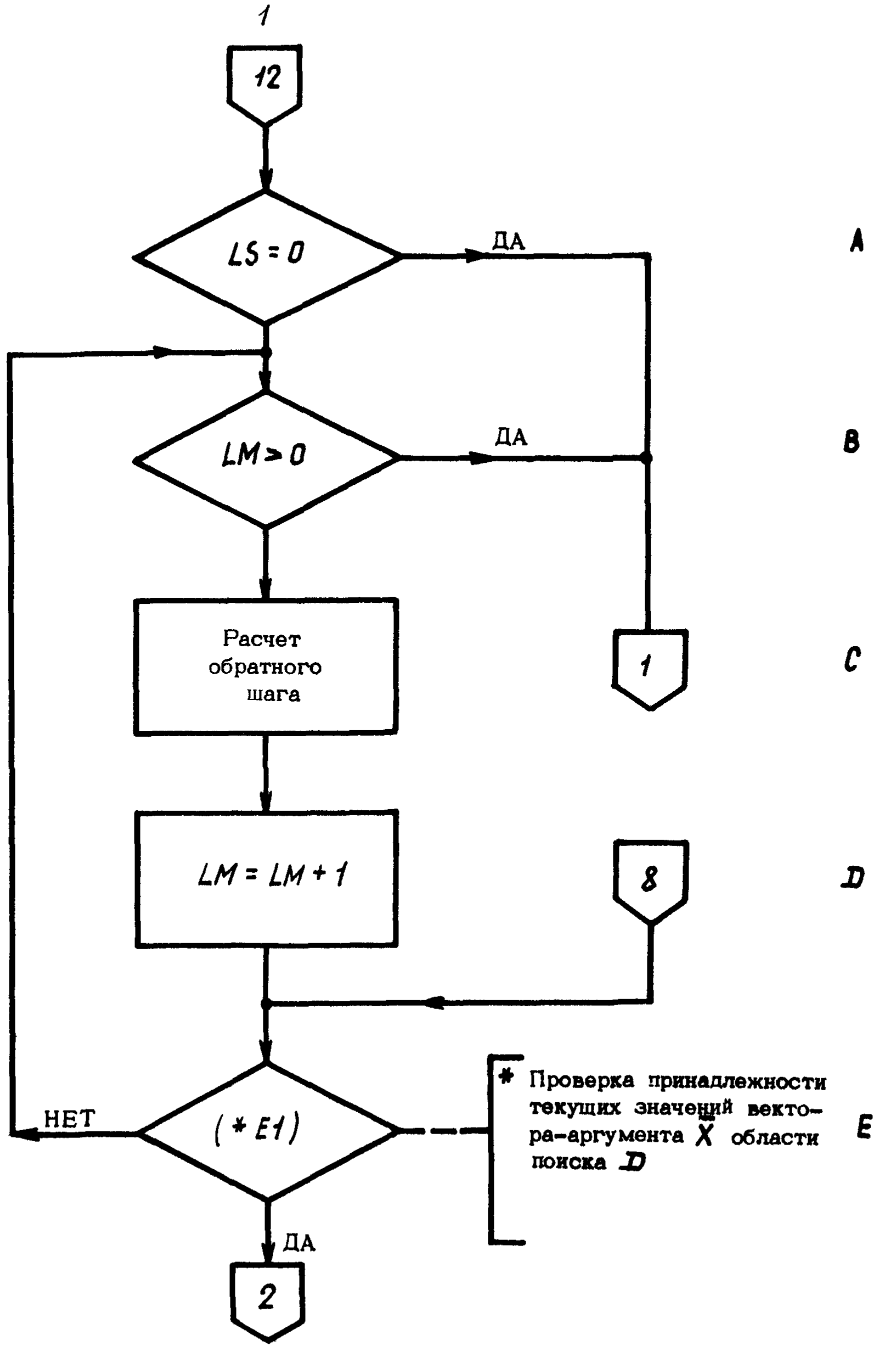
## БЛОК-СХЕМА АЛГОРИТМА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ




1
3
$Q^* = \hat{Q}_K$
5
A
$LM > 0;\ ДГ > 0$
ДА
B
$K = 1$
ДА
C
1
D
$K = NN$
ДА
6
$|Q^*_{æ} - Q^*_{æ-1}| > S_2 Q^*_{æ}$
ДА
E
$K8 = 0$
F
$K8 = K8 + 1$
G
7


1
7
LS = LS + 1
A
( * B1 )
* Расчет значений вектора-аргумента X̄ при направленном шаге поиска
B
8
1
( * C2 )
* Определение случайных значений исходной точки поиска
C
4
K = NN
ДА
K = 0
D
9
ДА
ДГ > 0
6
K30 = K30 + 1
E
ДА
LM = 0
K30 > NT
F
ДА
10
ДГ = ДГ + 1
Печать результатов
G
11
Конец
H


1
5
11
( * A1 )
* Расчет статистической оценки градиента
A
( * B1 )
* Расчет значений вектора-аргумента $\bar{X}$ при градиентном поиске
B
2
9
2
( * C1 )
* Пересчет вектора-аргумента $\bar{X}$ при градиентном поиске
C
ДА
( * D1 )
$* \bar{\Delta d_r} > Д7(\overline{XM} - \overline{XN})$
D
ДА
K8 < N1
10
E
( * F1 )
* Итеративный пересчет значений коэффициентов масштаба
F
12




Примечание. На схеме применены следующие условные обозначения:

*LS* - индекс счетчика числа удачных шагов поиска;

*LM* - индекс счетчика числа неудачных шагов поиска;

*K30* - индекс счетчика числа исходных точек поиска;

*DГ* - индекс переменной, определяющей факт проведения расчета градиента (1 - проведение расчета градиента, 0 - непроведение расчета градиента).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Справочное

## ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГОРИТМА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Пример 1.

1. Определить значения управляющих воздействий $U_j(K)$, (где $K$ – число шагов оптимизации), оптимизирующих процесс изменения показателей $\Pi_i(K)$ ($i$ – индекс типа показателей) производственного контура подсистемы управления качеством (УК).

2. Рассматривается упрощенный вариант модели управления, состоящий из двух подпроцессов:

- контроля обеспечения качества готовых изделий в сборочном производстве;
- контроля поддержания качества изделия при гарантийной эксплуатации.

Предполагается, что приложение управляющих воздействий возможно лишь в первом подпроцессе ($j=1$).

3. В этих условиях постановка задачи оптимального управления формулируется следующим образом.

Требуется найти оптимальное управление $\{U_1(K),\quad K=2, 3, \ldots, N-1\}$ ($N$ – число интервалов оптимизации) при ограничениях $U_1(K)>0$; $U_1(1)=0$; $\sum\limits_{K=2}^{N-1} U_1(K)<0{,}1$ и соответствующую ему траекторию вида

$$\begin{cases} \Pi_1(K+1)=\Pi_1(K)+0{,}8\,U_1(K)+0{,}4\,U_1(K-1); \\ \Pi_2(K+1)=\Pi_2(K)+0{,}5\,U_1(K)+0{,}2\,U_1(K-1), \end{cases}$$

максимизирующее критерий качества управления $J=\Pi_2(N)$ и удовлетворяющее начальным условиям $\Pi_1(2)=0{,}9$; $\Pi_2(2)=0{,}9$ и ограничениям $\Pi_1(N)\leq 0{,}999$; $\Pi_2(N)\leq 0{,}999$, $N=7$.

4. Данная задача относится к задачам динамического программирования с критерием качества регулирования, зависящим лишь от конечного состояния.

5. Результат поиска приведен в табл. 1.

Таблица 1

| Интервал оптимизации $K$ | Показатель состояния подпроцессов. | | Управляющее воздействие |
|---|---|---|---|
| | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $U_1$ |
| 2 | 0,900 | 0,900 | 0,008 |
| 3 | 0,906 | 0,903 | 0,018 |
| 4 | 0,923 | 0,914 | 0,010 |
| 5 | 0,932 | 0,923 | 0,028 |
| 6 | 0,962 | 0,941 | 0,033 |
| 7 | 0,998 | 0,959 | – |

При этом $\sum\limits_{K=2}^{N-1} U_1(K)=0{,}098$.

6. Решение данной задачи методом, основанным на принципе максимума, имеет следующий вид

$$П_1(7) = 0{,}999\ ; \qquad П_2(7) = 0{,}960 \text{ при } \sum_{K=2}^{N-1} u_1(K) = 0{,}101.$$

Пример 2.

1. Найти оптимальный вариант программы мероприятий, направленных на улучшение качества изделий.

В качестве критерия используется суммарный эффект от реализации программы мероприятий.

2. Математически задача состоит в нахождении вектора $\bar{Z}$, максимизирующего критериальную функцию вида

$$Q = \sum_{i=1}^{N} SSW_i\, Z_i \longrightarrow max$$

при условии, что искомый вектор $\bar{Z}$, определяющий программу мероприятий, принадлежит области допустимых решений, описываемой системой неравенств

$$Z_i^H \leq Z_i \leq Z_i^B\,, \quad i = 1, N$$

$$Ф_j(\bar{Z}) = \sum_{i=1}^{N} q_{ji}\, Z_j \leq QQ_j\,, \quad j = 1, NR\,,$$

где $N$ – число типов изделий;

$SSW_i$ – эффект от реализации одного мероприятия по изделию $i$– го типа;

$Z_i^H, Z_i^B$ – заданные значения нижних и верхних границ количества мероприятий по изделию $i$-го типа;

$NR$ – количество лимитирующих ресурсов;

$Ф_j(\bar{Z})$– величина потребного годового фонда $j$-го ресурса;

$q_{ji}$ – нормы расхода $j$-го ресурса при проведении мероприятий по $i$-му изделию;

$QQ_j$ – величина наличного фонда ресурсов $j$-го вида.

3. В рассматриваемом примере $N = 6$, $NR = 9$.

Нормы расхода соответствующих ресурсов $q_{ji}$ и величины $QQ_j$ в условных единицах приведены в табл. 2.

Таблица 2

| Наименование ресурса | Норма расхода $j$-го ресурса | | | | | | Наличный фонд $j$-го ресурса $QQ_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Площадь сборки | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 2,0 | 0,1 | 0,1 | 60 |
| Оборудование типа А | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 60 |
| Трудоемкость | 99,40 | 37,75 | 19,75 | 54,40 | 74,45 | 53,00 | 2000 |

Продолжение табл. 2

| Наименование ресурса | Норма расхода $j$-го ресурса | | | | | | Наличный фонд $j$-го ресурса $QQ_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Оборудование типа Б | 2,400 | 1,540 | 0 | 0 | 0 | 0 | 351 |
| Оборудование типа В | 2,400 | 1,960 | 0 | 0 | 0 | 0 | 448 |
| Материалы типа А | 1,800 | 3,300 | 5,330 | 0 | 0 | 0 | 479 |
| Материалы типа Б | 0 | 0 | 2,070 | 0 | 8,700 | 0 | 388 |
| Оснастка | 0 | 0 | 0,436 | 0 | 19,100 | 12,363 | 424 |
| Приспособления | 0 | 3,000 | 0,364 | 0 | 9,100 | 26,737 | 359 |

4. Значения эффекта от реализации одного мероприятия по изделию $i$-го типа в условных стоимостных единицах приведены в табл. 3.

Таблица 3

| Тип изделия $i$ | $SSW_i$ | Тип изделия $i$ | $SSW_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 93,400 | 4 | 72,050 |
| 2 | 72,350 | 5 | 217,250 |
| 3 | 27,300 | 6 | 455,000 |

Оптимальный вариант мероприятий, обеспечивающих максимальный суммарный эффект от их реализации $Q$ = 7725,212 условных стоимостных единиц, приведен в табл. 4.

Таблица 4

| Тип изделия $i$ | $Z_i$ | Тип изделия $i$ | $Z_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 19 |
| 2 | 0 | 5 | 4 |
| 3 | 1 | 6 | 12 |

Возможности использования алгоритма при решении различных оптимизационных задач, не имеющих физического приложения к задачам в подсистеме УК, продемонстрированы на следующих примерах.

Пример 3.

1. Найти оптимальные значения вектора $\overline{X}$, соответствующие глобальному минимуму критериальной функции

$$Q = 15 + 10 \cdot e^{(-0{,}05X_1)} \cdot \cos(0{,}7X_1) + 0{,}1X_2$$

в области допустимых значений, определенной простыми ограничениями вида

$$0 \le X_1 \le 20\,; \quad 0 \le X_2 \le 20.$$

2. Данная функция имеет 12 экстремумов.

Глобальный экстремум $Q_{гл}$ = 6,990 при $X_1$ = 4,405 и $X_2$ = 0.

Найденная оценка глобального экстремума $\hat{Q}_{гл}$ = 6,992 при $\hat{X}_1$ = 4,399 и $\hat{X}_2$ = 0,002 (время поиска $t \approx 2$ с).

Пример 4.

1. Найти оптимальные значения вектора $\bar{X}$, соответствующие глобальному максимуму критериальной функции.

$$Q = 75{,}196 - 3{,}8112 \cdot X_1 + 0{,}12694 \cdot X_1^2 - 2{,}0567 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 + 1{,}0345 \cdot 10^{-5} \cdot X_1^4 -$$

$$- 6{,}8306 \cdot X_2 + 0{,}030234 \cdot X_1 X_2 - 1{,}2813 \cdot 10^{-3} X_2 X_1^2 + 3{,}5256 \cdot 10^{-5} \cdot X_2 X_1^3 -$$

$$- 2{,}266 \cdot 10^{-7} \cdot X_2 X_1^4 + 0{,}25645 \cdot X_2^2 - 3{,}4604 \cdot 10^{-3} \cdot X_2^3 + 1{,}3514 \cdot 10^{-5} \cdot X_2^4 -$$

$$- \frac{28{,}106}{X_2 + 1} - 5{,}2375 \cdot 10^{-6} \cdot X_1 X_2^2 - 6{,}3 \cdot 10^{-8} \cdot X_1^3 X_2^2 + 7 \cdot 10^{-10} \cdot X_1^3 X_2^3 +$$

$$+ 3{,}4054 \cdot 10^{-4} \cdot X_1 X_2^2 - 1{,}6638 \cdot 10^{-6} \cdot X_1 X_2^3 - 2{,}8673 \cdot \exp(0{,}0005 X_1 X_2)$$

в областях допустимых значений, определенной ограничениями вида

$$\begin{cases} 0 \le X_1 \le 75, \\ 0 \le X_2 \le 65, \\ X_1 X_2 - 700 \ge 0, \\ X_2 - 5 \left(\dfrac{X_1}{25}\right)^2 \ge 0, \\ (X_2 - 50)^2 - 5 (X_1 - 55) \ge 0. \end{cases}$$

2. Найденная оценка глобального экстремума $\hat{Q} = 6{,}728$ при $\hat{X}_1 = 45{,}631$ и $\hat{X}_2 = 51{,}638$.

Время поиска $t \approx 14$ с.

## ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

| № изм. | Номера страниц | | | | Номер "Изв. об изм." | Подпись | Дата | Срок введения изменения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | изме-ненных | заме-ненных | новых | аннулированных | | | | |

| Инв. № дубликата | Инв. № подлинника |
|---|---|
| | 4463 |