ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ

МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНОСТИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

ГОСТ 18.401—77

Издание официальное

Цена 15 коп.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР
Москва

РАЗРАБОТАН И ВНЕСЕН Всесоюзным научно-исследовательским институтом стандартизации (ВНИИС)

Директор **А. В. Гличев**
Руководитель темы **В. В. Ткаченко**
Зам. руководителя темы **Д. М. Комаров**
Исполнители: **Н. Д. Алексеева, Ю. С. Вениаминов, Е. В. Извеков, С. А. Клявина, Г. В. Литманс, А. В. Матвеев, О. Ф. Пославский, Е. Н. Пронина, М. Л. Сыроватко, Г. С. Табакова**

ПОДГОТОВЛЕН К УТВЕРЖДЕНИЮ Всесоюзным научно-исследовательским институтом стандартизации (ВНИИС)

Директор **А. В. Гличев**

УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 12 декабря 1977 г. № 2858

УДК 006.1:006.354 Группа Т51

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Количественные методы оптимизации параметров объектов стандартизации
МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНОСТИ
Основные положения

Quantitative methods of optimization for parameters of standardization objects. Methods for providing integrity. Basic aspects

ГОСТ 18.401—77

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 12 декабря 1977 г. № 2858 срок действия установлен

с 01.01. 1979 г.

до 01.01. 1984 г.

Настоящий стандарт устанавливает основные положения, содержащие требования к методам обеспечения комплексности оптимизации параметров объектов стандартизации, классификацию группы методических и нормативно-технических документов, регламентирующих методы обеспечения комплексности, а также термины и определения основных понятий, используемых при обеспечении комплексности оптимизации.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. **Комплексность оптимизации параметров объектов стандартизации (комплексность ОПОС)** — свойство оптимизации, характеризуемое принятыми границами комплексности и определяющее точность и подробность оптимизации (см. справочное приложение 1).

1.2. **Границы комплексности** — границы, определяющие совокупность совместно оптимизируемых параметров объекта стандартизации и факторов, учитываемых при оптимизации и влияющих на оптимальные значения параметров.

1.3. **Методы обеспечения комплексности оптимизации параметров объектов стандартизации** — методы, позволяющие производить оптимизацию при достаточно широких границах комплексности.

Издание официальное

Перепечатка воспрещена

★

1.4. **Оптимизируемый комплекс в задачах оптимизации параметров объектов стандартизации** — оптимизируемый объект стандартизации, представляющий совокупность двух и более элементов.

1.5. **Элемент комплекса** — часть комплекса, у которой теоретически или экспериментально можно определить вход и выход и установить зависимость выхода от входа, определяемую природой элемента.

Вход и выход элемента представляют собой скалярные или векторные величины, имеющие определенный физический, экономический и социальный смысл. Входами и выходами могут быть величины, значения которых характеризуют изделия, продукты, процессы.

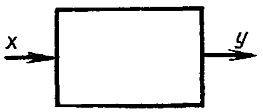
К элементам комплекса относятся машины, сборочные единицы, детали, технологические операции, объекты в разных состояниях и в отдельные моменты времени и т. д.

Расчленение комплекса на элементы определяется требуемой точностью, подробностью и целью оптимизации и наличием данных о связях между параметрами объекта.

1.6. **Одномерный элемент комплекса** — элемент комплекса, вход и выход которого представляют собой скалярные величины (черт. 1).

1.7. **Многомерный элемент комплекса** — элемент комплекса, вход и (или) выход которого представляют собой векторные величины (черт. 2).

Одномерный элемент



Черт. 1

Многомерный элемент

k — число скалярных составляющих вектора входа $\overline{x}$; u — число скалярных составляющих вектора выхода $\overline{y}$

Черт. 2

1.8. **Завершенный элемент комплекса** — элемент комплекса, обладающий следующими свойствами:

элемент может функционировать независимо от функционирования остальной части комплекса;

в случае прекращения функционирования элемента остальная часть комплекса может функционировать, однако эффективность комплекса при этом снижается.

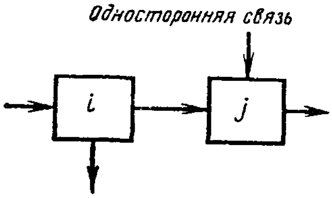
Номенклатура составляющих вектора выхода завершенного элемента входит в номенклатуру составляющих вектора выхода комплекса.

1.9. **Незавершенный элемент комплекса** — элемент комплекса, не обладающий хотя бы одним из свойств завершенного элемента.

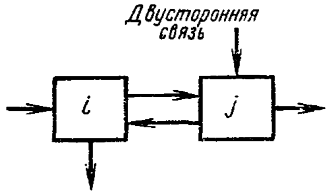
1.10. **Односторонняя связь между элементами комплекса** — связь, при которой выход одного элемента (например, i-го) полностью или частично является входом или часть входа другого элемента (например, j-го) и никакая часть выхода j-го элемента не является хотя бы частью входа i-го элемента (черт. 3).

i-й элемент называется предыдущим, j-й элемент — последующим.

1.11. **Двусторонняя связь между элементами комплекса** — связь, при которой не только выход или часть выхода одного элемента (например, i-го) является входом или частью входа другого элемента (например, j-го), но и выход или часть выхода j-го элемента является входом или частью входа i-го элемента (черт. 4).



Черт. 3



Черт. 4

1.12. **Последовательное соединение элементов комплекса** — соединение элементов комплекса с помощью односторонних связей.

1.13. **Последовательный комплекс** — комплекс, состоящий из незавершенных элементов, в котором любая пара связанных элементов соединена последовательно.

Основные объекты стандартизации, которые при оптимизации их параметров целесообразно рассматривать как последовательные комплексы, приведены в справочном приложении 2.

1.14. **Простейший последовательный комплекс** — последовательный комплекс, в котором выход любого элемента (кроме последнего) совпадает с входом последующего.

Вход простейшего последовательного комплекса совпадает с входом первого элемента, а выход — с выходом последнего элемента.

1.15. **Полная заменяемость элемента комплекса** — возможность замены элемента комплекса с одними параметрами на элемент (элементы) с другими параметрами без изменения эффективности функционирования комплекса.

Ограниченная заменяемость элемента комплекса — возможность замены элемента комплекса с одними параметрами на элемент (элементы) с другими параметрами, приводящая к снижению эффективности функционирования комплекса.

1.16. **Параллельный комплекс** — комплекс, состоящий из завершенных элементов с ограниченной заменяемостью.

Параметрический ряд в задачах оптимизации является частным случаем параллельного комплекса, у которого векторы выхода каждого элемента и всего комплекса имеют одинаковую номенклатуру составляющих.

1.17. **Эффективная совокупность значений параметров комплекса многоцелевого назначения** — совокупность значений параметров, в которой любое изменение значения параметра (или нескольких параметров), приводящее к повышению уровня достижения хотя бы одной цели при данных условиях, обязательно приводит к снижению уровня достижения хотя бы одной другой цели.

Совокупность оптимальных значений параметров комплекса является частным случаем эффективной совокупности значений параметров.

1.18. **Базовая математическая модель оптимизации** — модель оптимизации большого класса комплексов данной отрасли или нескольких отраслей, предназначенная для составления рабочих математических моделей оптимизации конкретных объектов (комплексов).

В базовой математической модели не обязательно раскрывать все математические выражения до степени детализации, достаточной для разработки программы вычисления на ЭВМ.

Базовые межотраслевые математические модели оптимизации простейших последовательных и параллельных комплексов приведены соответственно в справочных приложениях 3 и 4.

1.19. **Рабочая математическая модель оптимизации** — модель оптимизации, содержащая всю информацию, необходимую для оптимизации комплекса.

1.20. **Унифицированный ряд математических моделей оптимизации** — совокупность рабочих математических моделей оптимизации, обеспечивающих решение некоторого класса задач отрасли (предприятия).

Модели унифицированного ряда отличаются друг от друга границами комплексности, степенью неопределенностей, способом учета неопределенностей, полнотой учета изменения во времени и другими особенностями, которые отражаются на видах математических зависимостей и вычислительных процедурах.

2. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТОВ СТАНДАРТИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ

2.1. Основные требования к методам оптимизации параметров объектов стандартизации — по ГОСТ 18.001—76, разд. 2.

2.2. По мере расширения границ комплексности с целью удовлетворения требований к методам оптимизации по точности, подробности и своевременности, а также обеспечения широкого применения этих методов в народном хозяйстве следует:

использовать разные постановки задач оптимизации комплекса;

координировать работы разных специалистов и организаций, составляющих математические модели оптимизации;

увеличить уровень унификации и агрегатирования математических моделей и вычислительных процедур;

более полно осуществить проверку применимости и коррекции используемых математических моделей;

шире использовать сочетания теоретических методов оптимизации с экспериментальными методами оптимизации и с приближенными методами обоснования;

учитывать многоцелевое назначение объектов стандартизации;

сочетать имитационные эксперименты на ЭВМ по математическим моделям с методами математического программирования и другими вычислительными процедурами;

увязать задачи автоматизированной системы оптимизации параметров объектов стандартизации с другими задачами смежных АСУ.

2.3. В зависимости от функции управления качеством, для выполнения которой производится оптимизация, наличия исходных данных, времени, разработанных методов и средств оптимизации, используемые для оптимизации данного комплекса математические модели должны отличаться друг от друга совокупностью оптимизируемых параметров и элементов комплекса, анализируемыми явлениями (процессами), степенью агрегатирования параметров и другими особенностями.

Некоторые параметры и элементы комплекса входят в две и больше модели, а некоторые математические модели охватывают весь комплекс и его взаимодействие с другими объектами.

2.4. С целью координации работ различных специалистов и обеспечения их специализации процесс построения математических моделей оптимизации параметров комплекса, выполняемый по ГОСТ 18.101—76, следует проводить в три этапа:

построение эскизной схемы структуры и функционирования комплекса;

построение математической модели функционирования комплекса;

построение математической модели оптимизации комплекса (составление целевой функции и дополнительных ограничений).

Схема распределения работ по этапам приведена в табл. 1.

Таблица 1

Типовая схема распределения работ по построению математической модели комплексной оптимизации

Содержание работ	Выполнение этапов работы		
	построение эскизной схемы структуры и функционирования	построение математической модели функционирования	построение математической модели оптимизации
1. Словесная постановка задачи оптимизации, в том числе построение дерева целей	Иногда выполняется предварительно	Выполняется предварительно	Уточняется
2. Словесное описание функционирования комплекса	Выполняется	Уточняется	То же
3. Выделение комплекса из среды	Выполняется предварительно	То же	»
4. Расчленение комплекса на элементы	То же	»	»
5. Установление номенклатуры параметров комплекса:			
оптимизируемые технические параметры	»	»	»
остальные технические параметры	»	»	»
экономические показатели (затраты, эффекты)	Не выполняется или выполняется предварительно	Может уточняться	»
6. Составление функции преобразования для элементов	Выполняется предварительно без детализации	Уточняется	»
7. Составление ограничений на:			
оптимизируемые технические параметры	Иногда выполняется	Выполняется	»
остальные технические параметры	То же	То же	»
затраты и эффекты	Не выполняется	Не выполняется	Выполняется
8. Составление граничных условий	Иногда выполняется предварительно	Выполняется, иногда предварительно	То же
9. Прогнозирование изменений исходных данных	Не выполняется	Не выполняется	»

Продолжение табл. 1

Содержание работ	Выполнение этапов работы		
	построение эскизной схемы структуры и функционирования	построение математической модели функционирования	построение математической модели оптимизации
10. Предварительное прогнозирование части параметров, подлежащих оптимизации	Не выполняется	Не выполняется	Выполняется
11. Формализация целевой функции	То же	То же	То же
12. Уточнение формулировки задачи оптимизации	»	»	»
13. Придание модели вида, удобного для вычисления	»	Иногда выполняется	»
14 Проверка точности и сложности модели оптимизации (границ комплексности)	»	Выполняется предварительно	Выполняется предварительно
15. Коррекция математической модели оптимизации	»	Не выполняется	То же

Примечание. Подпункты 14 и 15 выполняются также при разработке алгоритма вычисления и после пробных вычислений.

2.5. Для обеспечения комплексности оптимизации составляют следующие математические модели:

базовые межотраслевые;

базовые отраслевые;

унифицированные ряды математических моделей отрасли (предприятия).

2.5.1. Построение унифицированного ряда математических моделей обеспечивает более высокий уровень унификации, чем построение базовых математических моделей. Базовые отраслевые модели следует применять при отсутствии информации для построения унифицированного ряда моделей.

2.5.2. Для увеличения числа задач, решаемых по данной математической модели, и уменьшения числа необходимых моделей следует увеличить их универсальность. Но это усложняет модели и затрудняет их применение в конкретных случаях.

Целесообразную универсальность и целесообразное число моделей унифицированного ряда следует определять на основе анализа следующих факторов:

количество задач, решаемых при помощи данной модели;

средний эффект использования унифицированной модели при решении одной задачи в результате упрощения составления модели и вычислений.

2.6. При определении целесообразных границ комплексности по мере их расширения следует в процессе построения модели и при вычислении оптимальных параметров более строго производить количественную проверку применимости используемой математической модели и при необходимости ее корректировать согласно общей схеме оптимизации параметров объектов стандартизации по ГОСТ 18.101—76.

2.6.1. Применимость данной математической модели следует проверять оценкой влияния принимаемых допущений на результаты оптимизации и (или) сравнением результатов расчета и опыта.

Целесообразно отдельно проверять точность и подробность математической модели функционирования, для которой обычно легче получить опытные данные, чем для всей модели оптимизации.

2.6.2. Для проверки применимости данной математической модели следует предусмотреть соответствующие расчеты, имея специальный блок (блоки) в математической модели оптимизации, или по специальной математической модели.

2.7. Агрегатирование математических моделей заключается в сочетании готовых блоков общей схемы оптимизации параметров объектов стандартизации, а также в агрегатировании блоков из отдельных элементов.

2.8. По мере увеличения комплексности следует шире использовать сочетания строгих методов оптимизации с приближенными и теоретических методов с экспериментальными (ГОСТ 18.001—76).

При использовании строгих теоретических методов согласно общей схеме оптимизации параметров объектов стандартизации (ГОСТ 18.101—76) следует раскрыть функционирование объекта, эффекты, затраты, составить ограничения и целевую функцию.

Область применения приближенных методов определяют согласно справочному приложению 5.

2.8.1. Макрометоды при их сочетании со строгими методами следует применять преимущественно для получения исходных зависимостей или агрегированных показателей, которые затем используют при оптимизации строгими методами (см. справочное приложение 5).

По мере перехода от перспективного планирования к разработке стандартов, проектированию и аттестации качества продукции роль макрометодов уменьшается, а строгих методов увеличивается.

2.9. С целью обеспечения комплексности оптимизации для учета многоцелевого назначения объекта стандартизации в случаях, когда методы ГОСТ 18.001—76, разд. 1 недостаточны, определяется эффективная совокупность, а затем выбирается оптимальный вариант из этой совокупности.

2.10. С целью упрощения вычислений по моделям, содержащим много взаимосвязанных оптимизируемых параметров, случайные числа и случайные функции, нелинейность относительно оптимизируемых параметров и учитывающим изменения во времени, а также для облегчения проверки и коррекции моделей следует широко использовать в качестве вычислительной процедуры имитационные эксперименты на ЭВМ по построенным математическим моделям.

2.11. По возможности следует исходную сложную модель разделить на более простые модели, которые могут быть решены какими-либо численными методами.

3. СОСТАВ И ОБОЗНАЧЕНИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ И НОРМАТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ДОКУМЕНТОВ ГРУППЫ

3.1. Межотраслевые методические и нормативно-технические документы, регламентирующие методы обеспечения комплексности оптимизации, классифицируются на подгруппы в соответствии с табл. 2.

Таблица 2

Подгруппы документов, устанавливающие методы обеспечения комплексности

Код подгруппы	Наименование подгруппы документов
40	Основные положения
41	Методы оценки применимости и коррекции границ комплексности
42	Методы оптимизации параллельных комплексов
43	Методы оптимизации последовательных комплексов
44	Методы оптимизации комбинированных комплексов
45	Составление и анализ связанных математических моделей
46	Резерв
47	Резерв

3.2. Допускается классифицировать отраслевые документы, определяющие методы обеспечения комплексности, по особенностям объектов стандартизации.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

КОМПЛЕКСНОСТЬ ОПТИМИЗАЦИИ И МЕТОДЫ ЕЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Комплексность стандартизации характеризуется комплексностью оптимизации, а также степенью охвата стандартизацией совокупности взаимодействующих объектов и параметров и совокупностью взаимосвязанных стандартов.

Как правило, не вся совокупность стандартизуемых элементов объекта комплексной стандартизации оптимизируется совместно. Элементы объекта комплексной стандартизации могут разбиваться на группы, каждая из которых оптимизируется отдельно, при этом допускается включение одного и того же элемента в две и более группы.

Кроме того, некоторые оптимизируемые параметры могут быть не записаны в стандартах (например, обобщенные показатели качества) и, наоборот, не все стандартизируемые параметры оптимизируются; часть этих параметров может быть задана в виде ограничений.

Комплексность оптимизации необходима для обеспечения эффективности комплексной стандартизации.

Без достаточного уровня комплексности оптимизации нельзя в полной мере обеспечить оптимальное удовлетворение требований заинтересованных организаций и предприятий путем согласования параметров взаимосвязанных компонентов, входящих в объекты комплексной стандартизации, и увязку сроков введения в действие стандартов.

Методы обеспечения комплексности при теоретической оптимизации — это совокупность приемов (операций), а также порядок составления соответствующих математических моделей оптимизации при широких границах комплексности. Эти методы содержат также рекомендации по выбору математической процедуры определения оптимальных параметров по уже составленной модели.

В случае экспериментальной оптимизации методы обеспечения комплексности — это совокупность приемов (операций) разработки (выбора, модернизации) соответствующих технических устройств, планирования экспериментов и обработки данных экспериментов при широких границах комплексности.

Ввиду того, что с расширением границ комплексности существенно возрастают трудности составления, проверки применимости и коррекции математической модели, настоящий стандарт предназначен главным образом для обеспечения координации разработки и повышения унификации этих моделей с целью обеспечения широкого применения их в народном хозяйстве.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

ОСНОВНЫЕ ОБЪЕКТЫ СТАНДАРТИЗАЦИИ, КОТОРЫЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНО РАССМАТРИВАТЬ КАК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ

Объект оптимизации	Основные особенности оптимизации				
	Оптимизируемые параметры	Рассматриваемые явления (процессы)	Основы построения структуры комплекса	Сущность учитываемых связей между элементами	Обеспечиваемое свойство стандартизации
1. Комплекс элементов продукции	Параметры продукции	Функционирование (применение, использование) продукции и затраты на ее разработку и производство	Причинно-следственная очередность	Преобразование материала, энергии (силы), информации	Комплексность, иногда опережаемость
2. Технологический процесс	Параметры операций (групп операций, переходов)	Производство продукции, оказание услуг	Всегда очередность операций во времени, иногда и причинно-следственная очередность	Преобразование изделия, полуфабриката, энергии, информации	То же
3. Совокупность двух и более последовательных во времени моделей продукции	Изменение параметров продукции во времени	Совершенствование продукции	Очередность во времени и причинно-следственная очередность	То же, что и в подпункте 1 и использование задела оборудования, материалов, элементов, знаний, опыта	Комплексность и опережаемость

Продолжение

Объект оптимизации	Основные особенности оптимизации				
	Оптимизируемые параметры	Рассматриваемые явления (процессы)	Основы построения структуры комплекса	Сущность учитываемых связей между элементами	Обеспечиваемое свойство стандартизации
4. Совокупность двух и более последовательных во времени последовательных комплексов	Изменение параметров двух и более заменяющих друг друга во времени последовательных комплексов продукции	Совершенствование продукции	Причинно-следственная очередность и очередность во времени замены моделей продукции	То же, что в подпунктах 1 и 3	Комплексность и опережаемость
	Изменение параметров операций двух и более заменяющих друг друга во времени технологических процессов, являющихся последовательными комплексами	Совершенствование технологических процессов	Очередность операций и технологических процессов во времени	То же, что в подпунктах 2 и 3	То же

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Справочное

БАЗОВЫЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

1. Пространственная базовая математическая модель оптимизации простейших последовательных комплексов

1.1. Каждый n-ый элемент простейшего последовательного комплекса содержит набор оптимизируемых параметров

$$\overline{P}(n)=\left(P_1(n),\ P_2(n)\ ,\ldots,\ P_{k_n}(n)\ \right), \qquad (1)$$

где k_n — число оптимизируемых параметров n-го элемента.

Вектор $\overline{P}(n)$ принадлежит некоторому множеству $\{\overline{P}(n)\}$ его допустимых значений

$$\overline{P}(n)\in\{\overline{P}(n)\}. \qquad (2)$$

Вход в первый элемент комплекса $\overline{x}(1)$ или $\overline{y}(0)$ совпадает с входом комплекса $\overline{x}_K$

$$\overline{x}\,(1)=\overline{y}(0)=\overline{x}_K\,. \qquad (3)$$

Входом в каждый последующий элемент n служит выход предыдущего $(n—1)$ элемента

$$\overline{x}(n)\ =\overline{y}(n-1)=\left(y_1(n-1),\ y_2(n-1),\ldots,\ y_{u_{n-1}}(n-1)\right), \qquad (4)$$

где $n=2,\ \ldots\ ,\ N$;

N — число элементов комплекса;

u_{n-1} — число составляющих вектора выхода $\overline{y}(n—1)$.

Вектор $\overline{y}(n—1)$ принадлежит некоторому множеству $\{\overline{y}(n—1)\}$ его допустимых значений

$$\overline{y}\,(n-1)\in\{\overline{y}(n-1)\}. \qquad (5)$$

Выход n-го элемента равен

$$\overline{y}\,(n)=\left((y_1(n),\ y_2(n),\ldots,y_{u_n}(n)\right), \qquad (6)$$

где

$$\overline{y}(n)\in\{\overline{y}(n)\}, \qquad (7)$$

$\{\overline{y}(n)\}$ — множество допустимых значений вектора $\overline{y}(n)$.

Выход последнего элемента совпадает с выходом всего комплекса

$$\overline{y}\,(N)=\overline{y}_K.$$

Выход n-го элемента является функцией оптимизируемых параметров и входа

$$\overline{y}(n)=F^{[n]}\left(\overline{y}(n-1)\ ,\ \overline{P}(n)\right) \qquad (8)$$

или

$$y_1(n)=F_1^{[n]}\big(y_1(n-1),\ y_2(n-1),\ \dots,\ y_{u_{n-1}}(n-1);\ P_1(n), P_2(n),\ \dots,\ P_{k_n}(n)\big);$$

$$y_2(n)=F_2^{[n]}\big(y_1(n-1),\ y_2(n-1),\ \dots,\ y_{u_{n-1}}(n-1);\ P_1(n), P_2(n),\ \dots,\ P_{k_n}(n)\big);$$

. . . .

$$y_{u_n}(n)=F_u^{[n]}\big(y_1(n-1),\ y_2(n-1),\ \dots,\ y_{u_{n-1}}(n-1);\ P_1(n),\ P_2(n),\ \dots,\ P_{k_n}(n)\big),$$

где

$F^{[n]}=\big(F_1^{[n]},\ F_2^{[n]},\ \dots,\ F_{u_n}^{[n]}\big)$ — вектор-функция преобразования элемента n.

Граничными условиями могут быть

$$\begin{cases}\overline{x}_K=\overline{y}(0) & \text{— фиксирован,}\\ \overline{y}_K=\overline{y}(N) & \text{— не фиксирован,}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{x}_K=\overline{y}(0) & \text{— не фиксирован,}\\ \overline{y}_K=\overline{y}(N) & \text{— фиксирован,}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{x}_K=\overline{y}(0) & \text{— фиксирован,}\\ \overline{y}_K=\overline{y}(N) & \text{— фиксирован.}\end{cases} \qquad (9)$$

Зависимости (1)—(9) составляют пространственную базовую математическую модель функционирования простейшего последовательного комплекса.

1.2. Для построения пространственной базовой математической модели оптимизации к зависимостям (1)—(9) необходимо добавить выражение целевой функции и, иногда, дополнительные ограничения.

Целевая функция оптимизации часто имеет вид

$$Ц=\Phi\left(\overline{y}(N)\right)+\sum_{n=1}^{N} G^{[n]}\left(\overline{y}(n-1),\ \overline{P}(n)\right), \qquad (10)$$

где $\Phi(\overline{y}(N))$ — функция выхода комплекса;

$G^{[n]}(\overline{y}(n-1),\ \overline{P}(n))$ — функция, которая оценивает вклад каждого отдельного элемента в достижение цели.

Функция $G^{[n]}$ обычно выражает затраты $З^{[n]}$на создание и функционирование n-го элемента, эффект $Э^{[n]}$ или прибыль $Э^{[n]}—З^{[n]}$ от n-го элемента.

Оптимизация заключается в нахождении значений оптимизируемых параметров, при которых целевая функция достигает максимального (минимального) значения.

2. Пространственно-временная базовая математическая модель оптимизации простейших последовательных комплексов

2.1. Каждый n-ый элемент простейшего последовательного комплекса содержит K_n оптимизируемых параметров, значения которых зависят от времени

$$\overline{P}(n,\ t)=\left(P_1(n,\ t),\ P_2(n,\ t),\ \dots,\ P_{k_n}(n,\ t)\right). \qquad (11)$$

Вектор $\overline{P}(n,\ t)$ принадлежит некоторому множеству $\{\overline{P}(n,\ t)\}$ его допустимых значений

$$\overline{P}(n,\ t)\in\{\overline{P}(n,\ t)\}. \qquad (12)$$

Некоторые неоптимизируемые конструктивные параметры элемента также могут быть функциями времени вследствие износа, выгорания, перемещения масс и др., т. е.

$$\overline{P}_c(n,t)=\left(P_{c_1}(n,t),\ P_{c_2}(n,t),\ldots,P_{c_{m_n}}(n,\ t)\right), \tag{13}$$

где

m_n — число переменных во времени неоптимизируемых параметров n-го элемента.

Вход в первый элемент комплекса совпадает с входом всего комплекса

$$\overline{x}(1,\ t)=\overline{x}_K(t)=\overline{y}(0,\ t). \tag{14}$$

Входом в каждый последующий элемент служит выход предыдущего $(n-1)$-го элемента

$$\overline{x}(n,\ t)=\overline{y}(n-1,\ t)=(y_1(n-1,\ t),\ \ldots,\ y_{u_{n-1}}(n-1,\ t)), \tag{15}$$

где

$n=2,\ 3,\ \ldots,\ N$;

N — число элементов комплекса;

u_{n-1} — число составляющих вектора входа $\overline{y}(n-1,\ t)$.

Вектор $\overline{y}(n-1,\ t)$ принадлежит некоторому множеству $\{\overline{y}(n-1,\ t)\}$ его допустимых значений:

$$\overline{y}(n-1,\ t)\in\{\overline{y}(n-1,t)\}. \tag{16}$$

Выход n-го элемента равен

$$\overline{y}(n,\ t)=\left(y_1(n,\ t),\ y_2(n,\ t),\ \ldots,\ y_{u_n}(n,\ t)\right),$$

где

$$\overline{y}(n,\ t)\in\{\overline{y}(n-1,\ t)\}. \tag{17}$$

Выход последнего элемента совпадает с выходом комплекса

$$\overline{y}(N,\ t)=\overline{y}_K(t).$$

Выход n-го элемента является функцией входа, оптимизируемых параметров и времени:

$$\overline{y}(n,\ t)=F^{[n]}\left(\overline{y}(n-1,\ t),\overline{P}(n,\ t),t\right). \tag{18}$$

Влияние изменений неоптимизируемых конструктивных параметров учитывается как функция от t.

Часто вместо уравнения (18) составляется дифференциальное уравнение

$$\frac{d\,\overline{y}(n,\ t)}{dt}=f^{[n]}(\overline{y}(n-1,\ t),\overline{P}(n,t),\ t). \tag{18'}$$

При наличии дифференциальных уравнений (18′) в математическую модель функционирования необходимо включить начальные условия (состояние в момент $t=t_0$).

$$\overline{y}(n,\ t)=\overline{y}^*(n,\ t_0). \tag{18''}$$

Граничными условиями могут быть

$$
\begin{cases} \overline{x}_K(t)=\overline{y}(0,t) & \text{— заданная функция времени;} \\ \overline{y}_K(t)=\overline{y}(N,t) & \text{— незаданная функция времени;} \end{cases}
$$
$$
\begin{cases} \overline{x}_K(t)=\overline{y}(0,t) & \text{— незаданная функция времени;} \\ \overline{y}_K(t)=\overline{y}(N,t) & \text{— заданная функция времени;} \end{cases}
$$
$$
\begin{cases} \overline{x}_K(t)=\overline{y}(0,t) & \text{— заданная функция времени;} \\ \overline{y}_K(t)=\overline{y}(N,t) & \text{— заданная функция времени;} \end{cases} \qquad (19)
$$
$$
\begin{cases} \overline{x}_K(t)=\overline{y}(0,t) & \text{— незаданная функция времени;} \\ \overline{y}_K(t)=\overline{y}(N,t) & \text{— незаданная функция времени.} \end{cases}
$$

Зависимости (11)—(19) составляют пространственно-временную базовую математическую модель функционирования простейшего последовательного комплекса.

2.2. Для построения пространственно-временной базовой математической модели оптимизации простейших последовательных комплексов к зависимостям (11)—(19) необходимо добавить выражение целевой функции и иногда дополнительные ограничения, например, по производственным возможностям.

Целевая функция оптимизации часто имеет вид

$$
Ц=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{n=1}^{N} G^{[n]}\left(\overline{y}(n-1,\ t),\ \overline{P}(n,\ t),\ t\right)\right]dt+\Phi\left(\overline{y}(N,\ t_1)\right), \qquad (20)
$$

где

t_1 — заданный конечный момент времени или момент времени, для которого задан $\overline{y}(N,\ t)$.

Второе слагаемое $\Phi\left(\overline{y}(N,\ t_1)\right)$ выражает влияние состояния N-го элемента в момент t_1.

Подынтегральная функция $G^{[n]}$ зависит от изменения состояния $\overline{y}(n-1,\ t)$, значений параметров $\overline{P}(n,\ t)$, времени t и включает приведение эффектов и затрат к одному моменту времени.

2.3. Пространственно-временная модель, рассмотренная в пп. 2.1; 2.2, учитывает изменение во времени входа комплекса, конструктивных параметров элементов (вследствие износа, повреждения, изменения массы объекта в результате выгорания топлива и других химических реакций, расхода материалов, перемещения массы, биологических процессов и др.), начальных возмущений, а также экономических и социальных условий.

2.4. С целью расширения области применения базовых моделей оптимизации простейших последовательных комплексов входами и выходами в этих моделях считают лишь параметры состояния рассматриваемого процесса (состояние полуфабриката, модели продукции, энергии, деятельности), не включающие затраты и эффекты, связанные с созданием и эксплуатацией данного элемента и учитываемые функциями $G^{[n]}$.

2.5. Применять указанные базовые модели для разработки рабочих моделей следует в соответствии с таблицей.

Базовая модель	Рабочая модель		
	по динамичности	по числу ступеней[1] значений оптимизируемых параметров	по уровню неопределенности
Пространственная	Статическая	Одноступенчатая	Детерминированная
	То же	То же	Вероятностная
	Квазистатическая[2]	»	Детерминированная
	То же	»	Вероятностная
Временная[3]	Динамическая без разделения комплекса на элементы	Многоступенчатая	Детерминированная
	То же	То же	Вероятностная
Пространственно-временная	Динамическая с разделением комплекса на элементы	Одноступенчатая	Детерминированная
	То же	То же	Вероятностная
	»	Многоступенчатая	Детерминированная
	»	То же	Вероятностная

[1] Число ступеней значений оптимизируемых параметров — число одновременно оптимизируемых, сменяющих друг друга, моделей продукции.

[2] Квазистатическая модель — по ГОСТ 18.001—76.

[3] В данном случае последовательный комплекс получается при рассмотрении состояний объекта в некоторые моменты времени как отдельных элементов. Число элементов равно числу рассматриваемых моментов времени (числу состояний). Для таких задач можно пользоваться пространственной базовой моделью, заменяя в ней номер элемента на номер момента времени.

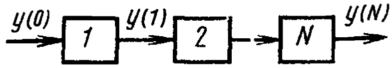
3. Использование базовых математических моделей оптимизации простейших последовательных комплексов.

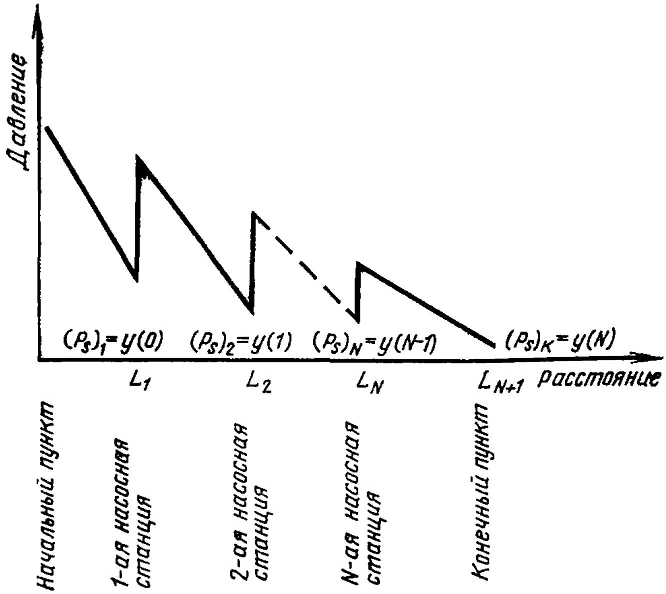
3.1. Примеры использования пространственной базовой математической модели оптимизации простейших последовательных комплексов*.

Пример 1. Оптимизация системы трубопроводов [11].

Необходимо транспортировать поток нефти Q с помощью N последовательно расположенных насосных станций, при этом начальное давление всасывания $(P_s)_1$, расстояние от начала трубопровода по n-ой станции L_n и давление в конечном пункте $\overline{y}(N)=y_K=(P_s)_K$.

* Из приведенных ниже примеров видно, что для оптимизации сложного комплекса можно применять несколько моделей, в каждой из которых оптимизируется только часть комплекса или часть его параметров. Однако в таких случаях для определения оптимальных параметров комплекса следует применять также модели, служащие для увязки результатов оптимизации отдельных частей. Полученные в примерах оптимальные значения параметров могут быть использованы при проектировании трубопровода и его частей и как исходные данные по потребностям (спросу) при оптимизации параметрических рядов диаметров труб, параметров насосов и т. д.





Черт. 1

На промежуточных насосных станциях потоку Q сообщается энергия, достаточная для компенсации потерь давления за счет трения жидкости в трубопроводе и подъема жидкости на соответствующую высоту. Диаметр трубопровода постоянный.

Элементом рассматриваемого простейшего последовательного комплекса можно считать каждую насосную станцию с отходящим от нее участком трубопровода (до следующей насосной станции).

На каждой насосной станции необходимо сообщить потоку такое дополнительное давление $P(n)$, при котором обеспечивается требуемое давление $(P_s)_K$ в конечном пункте и минимальные приведенные суммарные затраты на транспортирование нефти.

В зависимости от конкретных условий могут быть поставлены другие задачи, например, оптимизация параметров насосов для каждой станции.

Эскизная схема структуры и функционирования представлена на черт. 1.

Математическая модель функционирования

Входом первого элемента является $x_K = y(0) = (P_s)_1$. Входом n-го элемента, $n=2, 3, \ldots, N$ является результирующее давление, создаваемое всеми первыми $(n-1)$ насосными станциями с учетом потерь на участке трубопровода от первой до n-ой станции

$$y(n-1) = (P_s)_n. \qquad (21)$$

Выходом n-го элемента является результирующее давление всасывания $(P_s)_{n+1}$ следующей станции, создаваемое всеми предыдущими насосными станциями с учетом потерь на участке от первой до $(n+1)$ станции

$$y(n)=(P_s)_{n+1}. \tag{22}$$

Выходом N-го элемента (выходом комплекса) является давление

$$(P_s)_K=y(N)=y_K. \tag{23}$$

Оптимизируемым параметром P (n) n-го элемента является повышение давления, создаваемое n-ой насосной станцией.

Уравнение преобразования элемента имеет вид

$$y(n)=y(n-1)+P(n)-\Delta P(n)(L_{n+1}-L_n)-k(E_{n+1}-E_n), \tag{24}$$

где

$y(n-1)=(P_s)_n$ — давление всасывания n-й станции;

$\Delta P(n)$ — потеря давления за счет трения на единице длины на участке n-го элемента;

$E_{n+1}-E_n$ — разность высот $(n+1)$-й и n-й насосных станций;

k — коэффициент пропорциональности;

$L_{n+1}-L_n$ — длина трубопровода на участке n-го элемента.

Математическая модель оптимизации

Математическая модель оптимизации составлена для случая, когда известны данные для расчета потерь на трение в трубопроводах и размещение насосных станций и следует оптимизировать только величину повышения давления $P(n)$, исходя из целевой функции минимума приведенных суммарных затрат. Это сводится к оптимальному выбору числа и типов насосов на каждой станции.

Математическая модель оптимизации в этом случае будет состоять:

из уравнений преобразований элементов

$$\begin{gathered} y(1)=y(0)+P(1)-\Delta P(1)(L_2-L_1)-k(E_2-E_1), \\ y(2)=y(1)+P(2)-\Delta P(2)(L_3-L_2)-k(E_3-E_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y(N)=y(N-1)+P(N)-\Delta P(N)(L_{N+1}-L_N)-k(E_{N+1}-E_N); \end{gathered} \tag{25}$$

граничных условий на левом и правом концах

$$x_K=(P_s)_1, \; y_K=(P_s)_K; \tag{26}$$

целевой функции приведенных суммарных затрат на транспортировку нефти.

Пример 2. Оптимизация параметров отдельных участков трубопровода [14].

Участок трубопровода можно рассматривать как простейший последовательный комплекс, состоящий из трех элементов: электродвигателя, который дает механическую мощность W в течение времени действия системы T, насоса, обеспечивающего перекачку, например, нефти с расходом ее Q на расстояние L.

С увеличением диаметра трубопровода D уменьшается гидравлическое сопротивление движению нефти и, следовательно, уменьшается необходимая мощность двигателя и расход электроэнергии. Однако с увеличением диаметра трубопровода возрастают затраты на изготовление и установку трубопровода и на его ремонт. Следовательно, существует некоторый оптимальный диаметр трубопровода.

На основе схемы структуры и функционирования комплекса и соответствующей математической модели функционирования найдено выражение для приведенных затрат:

$$З = a_1^* D + a_2^* D^{-4} + a_3^* D^{-4,75} + a_4^*, \tag{27}$$

где

a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^* — коэффициенты, зависящие от динамической вязкости μ, плотности перекачиваемой нефти ρ, расхода нефти Q, плотности материала γ, толщины стенок труб δ и длины трубопровода L, коэффициента полезного действия электродвигателя η, коэффициента относительных затрат на монтаж f, нормы амортизационных отчислений α, нормативного коэффициента эффективности капитальных вложений E, стоимости киловатт-часа электроэнергии $C_{эл}$ и килограмма труб $C_{тр}$.

В качестве эффекта $Э$ принят расход нефти в секунду Q_1. Величина Q_1 в рассматриваемом примере определена заранее и постоянна

$$Э = Q = \text{const}. \tag{28}$$

Математическая модель оптимизации диаметра участка трубопровода состоит из целевой функции минимизации приведенных затрат

$$З = a_1^* D + a_2^* D^{-4} + a_3^* D^{-4,75} + a_4^* \to \min \tag{29}$$

при ограничении на эффект $Э$ и четырех ограничениях в виде функций, определяющих коэффициенты a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*.

Определив оптимальный диаметр $D_{опт}$, по математической модели функционирования вычисляют требуемую мощность двигателя и другие параметры комплекса.

Приведенной математической модели можно придать более удобный вид. При оптимальном диаметре трубопровода частные производные от приведенных затрат по D равны нулю (если это не противоречит ограничениям), тогда

$$a_1 D^{-3} + a_2 D^{-3,75} = 1, \tag{30}$$

где

$$a_1 = \frac{4a_2^*}{a_1^*}, \qquad a_2 = \frac{4,75 a_3^*}{a_1^*}.$$

Коэффициенты a_1 и a_2 согласно [14] вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{0,0103\,\rho T Q^3 C_{эл.}}{\gamma\delta\alpha\eta(1+f)(\alpha+E)C_{тр.}}, \\ a_2 &= \frac{0,00065(\rho\mu)^{0,75} C_{эл.} T Q^{2,75}}{\gamma\delta Q(1+f)(\alpha+E)C_{тр.}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Модель в этом виде содержит конечное выражение (30) для определения оптимальных значений параметров и поэтому оптимизация производится без применения специальных математических методов определения экстремума функции.

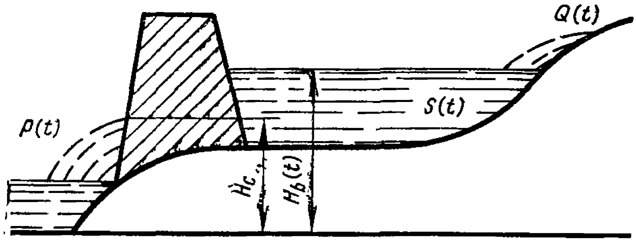
3.2. **Пример** использования пространственно-временной базовой математической модели оптимизации последовательных комплексов.

Оптимизация режима рабочего сброса воды водохранилища [4].

Такая задача возникает при разработке соответствующего стандарта предприятия или инструкции по эксплуатации гидротепловой энергосистемы.

Цель оптимизации режима рабочего сброса воды состоит в том, чтобы минимизировать затраты на удовлетворение определенных требований в электроэнергии.

Схема водохранилища приведена на черт. 2. Уровень воды в водохранилище $H_в(t)$. Уровень рабочего сброса воды H_c принимается постоянным, а рабочий сток (расход) ее $P(t)$ регулируется в течение суток. Приток воды в хранилище



Черт. 2

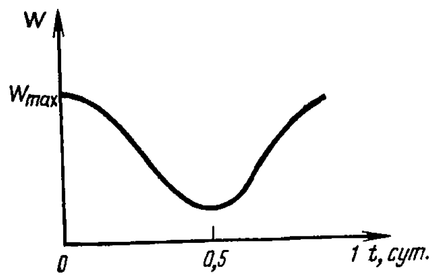
$Q(t)$ является функцией времени. Когда количество воды в водохранилище $S(t)$ достигает максимального значения $S(t)=S_{пред}$, начинается нерабочий сброс (т. е. минуя гидротурбины). При этом можно считать, что нерабочий сброс

$$R(t)=Q(t)-P(t), \tag{32}$$

так как при этом

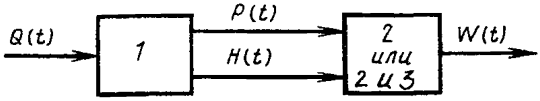
$$S(t)=S_{пред}=\mathrm{const}. \tag{33}$$

Потребление электроэнергии в течение суток изменяется (черт. 3). Для обеспечения потребителей электроэнергией в часы пик подключают тепловую электростанцию. Чем больше она работает, тем дороже обходится снабжение электроэнергией. Надо так отрегулировать рабочий сток воды, чтобы обеспечить ми-



Черт. 3

нимальные затраты на снабжение потребителей электроэнергией. Задача сводится к оптимизации простейшего последовательного комплекса, состоящего из трех элементов (водохранилище, гидротурбина и тепловая электростанция) (черт. 4). Так как параметры состояния изменяются не только при переходе одного элемента к другому, но еще зависят от времени, то для построения математической модели оптимизации следует пользоваться базовой пространственно-временной моделью.



1 — водохранилище; 2 — гидротурбина; 3 — теплоэлектростанция

Черт. 4

Математическая модель функционирования

Входом в комплекс является приток воды $x_K = x_1 = y(0) = Q(t)$. Оптимизируемым параметром комплекса является рабочий сток $P(t)$.

Состояние водохранилища характеризуется переменным уровнем воды $H_в(t)$ или количеством воды $S(t)$.

Связь между уровнем $H_в(t)$ и количеством воды $S(t)$ зависит от размеров водохранилища и определяется квадратичной зависимостью

$$H_в(t) = C_0 + C_1 S(t) + C_2 S(t)^2, \tag{34}$$

где

C_0, C_1, C_2 — постоянные.

Гидравлический напор равен разности между текущим уровнем воды $H_в(t)$ и уровнем сброса $H_с$ и может быть выражен функцией от общего количества воды в водохранилище

$$H(t) = H_в(t) - H_с = (C_0 - H_с) + C_1 S(t) + C_2 S(t)^2. \tag{35}$$

Скорость изменения количества воды в водохранилище равна разности между притоком и сбросом, т. е. $\frac{dS(t)}{dt}$.

$$\frac{dS(t)}{dt} = Q(t) - R(t) - P(t). \tag{36}$$

Причем, при $S(t) = S_{пред}$

$$R(t) = Q(t) - P(t) \tag{37}$$

и при $S(t) \angle S_{пред}$ $R(t) = 0$.

Для нормального функционирования необходимо, чтобы количество воды в водохранилище в начале и конце суточного периода было одинаковым, т. е.

$$S(0) = S(1). \tag{38}$$

Учитывая наличие в математической модели дифференциального уравнения (36), необходимо задать начальные условия, а именно количество воды в начальный момент

$$S = S(0) \text{ при } t = 0. \tag{39}$$

Так как переходные режимы (разгон и торможение) турбины (второго элемента комплекса) нас в этой задаче не интересуют, мощность, вырабатываемая гидротурбинами $W_г$, вычисляют по конечному (не дифференциальному) уравнению

$$W_г(t) = kH(t)\,P(t), \tag{40}$$

где k — постоянная;

$H(t)$ — гидравлический напор;

$P(t)$ — рабочий сброс.

На основании формул (34) и (35) выражение (40) можно записать:

$$W_{\text{г}}(t) = k[(C_0 - H_{\text{с}}) + C_1S(t) + C_2S(t)^2]P(t). \qquad (41)$$

Потребление мощности в течение суток изменяется по зависимости (см. черт. 3).

$$W(t) = \frac{W_{\max}}{3}(2+\cos 2\pi t), \qquad (42)$$

где

$W_{\max}$ — максимальная потребляемая мощность;

t — время, выраженное в сутках.

Максимальная потребность будет при $t=0$ и $t=1$, минимальная — при $t=0{,}5$.

При недостатке мощности гидростанции $W_{\text{г}}$ к системе подключают тепловую электростанцию, дающую мощность

$$\begin{aligned} W_{\text{т}} &= W - W_{\text{г}} \text{ при } W > W_{\text{г}}, \\ W_{\text{г}} &= 0 \qquad\quad \text{ при } W \ll W_{\text{г}}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Таким образом, математическая модель функционирования комплекса состоит из зависимостей (34)—(43).

Математическая модель оптимизации

В качестве целевой функции можно принять минимум суточных затрат на эксплуатацию системы, т. е.

$$Ц = \int_0^1 З(t)dt \to \min, \qquad (44)$$

где

$З(t)$ — эксплуатационные затраты в единицу времени.

По экспериментальным данным строят таблицу или эмпирическую зависимость для почасовых затрат и мощности теплостанции

$$З = З(W_{\text{т}}), \qquad (45)$$

считая, что почасовые затраты на эксплуатацию гидротурбины крайне малы.

Из уравнений (41) и (42) следует, что мощность $W(t)$ зависит от рабочего сброса $P(t)$. Требуется найти такое изменение рабочего сброса в течение суток, при котором удовлетворяются зависимости модели функционирования и целевая функция (44) достигает минимального значения.

Так как затраты (45) зависят, главным образом, от используемой мощности теплостанции $W_{\text{т}}$, то оптимизация по целевой функции (44) приводит к некоторому уменьшению этой мощности и, следовательно, к некоторому рациональному расходу топлива. Однако минимум расхода топлива при оптимизации по целевой функции (44) будет достигнут только в случае монотонного изменения во времени $З(t)$ и расхода топлива.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Справочное

БАЗОВЫЕ МЕЖОТРАСЛЕВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

1. Особенности математических моделей оптимизации параллельных комплексов

1.1. Каждый n-й элемент параллельного комплекса характеризуется вектором входа

$$\overline{x}(n)=\left(x_1(n),\ x_2(n),\ \ldots,\ x_{r_n}(n)\right), \tag{1}$$

вектором выхода

$$\overline{y}(n)=\left(y_1(n),\ y_2(n),\ \ldots,\ y_{u_n}(n)\right) \tag{2}$$

и управляющим вектором

$$\overline{P}(n)=\left((P_1(n),\ P_2(n),\ \ldots,\ P_{k_n}(n)\right), \tag{3}$$

где $P_i(n)$ — оптимизируемые параметры,
$n=1,\ 2,\ \ldots,\ N$;
r_n — число составляющих вектора входа $\overline{x}(n)$;
u_n — число составляющих вектора выхода $\overline{y}(n)$;
k_n — число составляющих вектора управления $\overline{P}(n)$;
N — число элементов в комплексе.

1.2. Функционирование n-го элемента параллельного комплекса определяется следующими функциями преобразования:

$$\begin{cases} y_1(n)=F_{1_n}\left(x_1(n),\ x_2(n),\ \ldots,\ x_{r_n}(n),\ P_1(n),\ \ldots,\ P_{k_n}(n)\right); \\ y_2(n)=F_{2_n}\left(x_1(n),\ x_2(n),\ \ldots,\ x_{r_n}(n),\ P_1(n),\ \ldots,\ P_{k_n}(n)\right); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{u_n}(n)=F_{u_n}\left(x_1(n),\ x_2(n),\ \ldots,\ x_{r_n}(n),\ P_1(n),\ \ldots,\ P_{k_n}(n)\right). \end{cases} \tag{4}$$

1.3. Для получения базовой математической модели оптимизации необходимо добавить к модели функционирования целевую функцию, которая в общем случае имеет вид:

$$Ц=Ц\left(\overline{y}(1),\ \ldots,\ \overline{y}(N),\overline{x}(1),\ldots\overline{x}(N),\overline{P}(1),\ldots,\overline{P}(N)\right). \tag{5}$$

В случае аддитивности выходов элементов

$$Ц=\sum_{n=1}^{N} G^{[n]}\left(\overline{y}(n),\overline{x}(n),\ \overline{P}(n)\right), \tag{6}$$

где

$G^{[n]}\left(\overline{y}(n),\overline{x}(n)\ ,\overline{P}(n)\right)$ — функция, которая оценивает вклад n-го элемента в достижение цели.

Управление процессом функционирования рассматриваемого объекта осуществляется выбором значений управляющих параметров $\overline{P}\ (n)$; $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N$, при которых выполняются заданные ограничения и целевая функция (5) достигает максимального (минимального) значения.

2. Базовая статическая математическая модель оптимизации параметрического ряда

2.1. Математическую модель оптимизации параметрического ряда получают на основе базовой математической модели оптимизации параллельного комплекса.

Важнейшей особенностью параметрических рядов является одинаковое количество составляющих векторов выходов $\overline{y}(n)$ для всех элементов $n=1, 2, \ldots, N$, т. е.

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \ldots = u_N = u,$$

при этом вектор выхода всего комплекса совпадает по номенклатуре с векторами выходов его элементов.

2.2. Коэффициентом заменяемости z^l_{ij} называется число, показывающее сколько в среднем требуется элементов комплекса n-го вида для обеспечения такой величины, какой имеет l-ая составляющая выхода элемента j-го вида. Обычно z^l_{ij} можно выразить через z_{il} — средний объем элемента комплекса i-го вида (в частности объем продукции или число объектов), необходимый для обеспечения единичной l-ой составляющей вектора выхода

$$z^l_{ij} = \frac{z_{il}}{z_{lj}}.$$

При каждом фиксированном l коэффициенты z^l_{ij} $i=1, \ldots, N$, $j=1, \ldots, N$ образуют матрицу заменяемости.

2.3. Ограниченная заменяемость характеризуется матрицами заменяемости $\{z^l_{ij}\}$ и функцией применяемости каждого элемента $\Theta_n(\overline{P})$, которая определяет, какая часть заданных потребностей типа $\overline{P}$ удовлетворяется изделиями типа $\overline{P}(n)$.

2.4. Математическая модель оптимизации параметрических рядов при макроподходе часто содержит функцию спроса $\varphi(\overline{y})$ или $\varphi(\overline{P})$. В частности, если $V(\overline{P})$ — объем работ, для которых требуется изделие с параметром $\overline{P}$, а $\Pi(\overline{P})$ — производительность изделия со значением параметра $\overline{P}$, то

$$\varphi(\overline{P}) = \frac{V(\overline{P})}{\Pi(\overline{P})}.$$

При оптимизации параметрических рядов при известной функции спроса или при заданном объеме выполняемых работ необходимо учесть размещение объекта оптимизации по предприятиям (цехам), а также размещение некоторых видов сельскохозяйственного, лесозаготовительного и других видов оборудования на обслуживаемой территории, от которого зависят коэффициенты использования этого оборудования.

2.5. При оптимизации параметрических рядов, как правило, необходимо учесть зависимость приведенных затрат на разработку, изготовление и применение единицы объема элемента комплекса от серийности не только данного элемента, но и от серийности близких элементов.

Оптимизация при целевой функции минимума затрат (потерь) на адаптацию вследствие несовпадения индивидуального спроса с предлагаемыми изделиями допускается только при практической независимости остальных составляющих затрат от выбранного параметрического ряда.

2.6. Схема структуры и функционирования объекта стандартизации в случае оптимизации параметрического ряда вырождается в описание области применения и назначения ряда, функционирования отдельных его элементов с указанием номенклатуры составляющих эффектов и затрат на их создание и применение, а также параметров изделий ряда, значения которых надо оптимизировать. При этом следует указать:

изменение эффектов и затрат при возможных изменениях параметров элементов;

возможную область применения каждого элемента;

предельные значения параметров комплекса;

значения параметров существующего комплекса;

целесообразность проверки допустимости некоторых ограничений при оптимизации (например, целесообразно ли фиксировать некоторые элементы, задавать их число N или интервал допустимых значений для N).

2.7. При составлении одномерной математической модели — (вектор $\overline{P}$ имеет одну компоненту) принимаются следующие допущения:

возможно определить спрос $\varphi(P)$, выраженный количеством изделий, как функцию параметра P;

элемент комплекса с параметром $P(n)$ используют только для удовлетворения спроса в интервале изменения параметра

$$P(n-1) < P \leqslant P(n+1);$$

доля спроса для $P(n—1)<P\leqslant P(n)$, которая удовлетворяется элементом комплекса с параметром $P(n)$, определяется функцией применяемости $\Theta_n(P)$ и, следовательно, доля спроса, которая удовлетворяется элементом комплекса с параметром $P(n)$ в интервале

$$P(n) < P \leqslant P(n+1) \text{ будет } \{1-\Theta_{n+1}(P)\};$$

спрос удовлетворяется и нет избытка продукции оптимизируемого комплекса.

Объем элемента комплекса с параметром $P(n)$, используемого для удовлетворения спроса в интервале $P(n—1)<P\leqslant P(n)$, будет

$$V'_n = \int\limits_{P(n-1)}^{P(n)} \varphi(P)\Theta_n(P)dP \tag{7}$$

и для удовлетворения спроса в интервале $P(n)<P\leqslant P(n+1)$

$$V''_n = \int\limits_{P(n)}^{P(n+1)} \varphi(P)[1-\Theta_{n+1}(P)]dP. \tag{8}$$

Следовательно, общий объем элемента комплекса с параметром $P(n)$

$$V_n = V'_n + V''_n. \tag{9}$$

В рассматриваемом частном случае оптимизации параметрического ряда уравнения (7)—(9) дают зависимость между объемом выпуска n-го элемента комплекса и спросом в интервале $P(n—1)<P\leqslant P(n+1)$.

2.8. В рассматриваемом упрощенном случае суммарные приведенные затраты (целевая функция) вычисляют по формуле

$$Ц\ \big(P(1), \ldots, P(N)\big) = \sum_{n=1}^{N} \{g^{0}_n\big(P(n)\big) + C_n(V_n)\cdot V_n +$$
$$+\int\limits_{P(n-1)}^{P(n)} \varphi(P)\cdot\Theta_n(P)\cdot g^{э}(P(n),\ P)dP + \int\limits_{P(n)}^{P(n+1)} \varphi(P)\cdot\big(1-\Theta_{n+1}(P)\big)\,g^{э}\big(P(n),P\big)dP\}, \tag{10}$$

где

$g_n^0(P(n))$ — затраты на исследование и проектирование n-го элемента;

$C_n(V_n)$ — затраты на изготовление единицы объема n-го элемента, производимого в объеме V_n;

$g^э(P(n)P)$ — затраты на эксплуатацию единицы объема элемента комплекса с параметром $P(n)$, используемого вместо требуемого объекта с параметром P;

$\Theta_n(P)$ может зависеть от $P(1), \ldots, P(N)$.

В зависимости от особенностей конкретной задачи вводятся следующие дополнительные ограничения:

часть параметров $P(n)$ фиксирована: $P_1^з, P_2^з, \ldots, P_{N_з}^з$,

где

$N_з$ — число элементов с заданными параметрами;

требуется гарантирование значения некоторого j-го свойства (например, гарантированная точность, ограничение веса, ограничение габаритных размеров и др.).

$$y_n^j \geqslant a_n^j \quad \text{или} \quad y_n^j < a_n^j; \tag{11}$$

затраты на разработку, изготовление и применение не должны превышать величины $З_{доп}$.

$$Ц < З_{доп}; \tag{11'}$$

ресурс некоторого материала, комплектующего элемента и т. д. ограничен

$$V \ll V_{доп}; \tag{11''}$$

задана функция применяемости $\Theta_n(P)$ или известен вид этой функции и надо оптимизировать ее коэффициенты.

2.9. Зависимости (7)—(9) совместно с целевой функцией (10) и дополнительными ограничениями (11) составляют базовую статическую математическую модель оптимизации параметрических рядов.

2.10. В случае неаддитивности отдельных составляющих выхода (входа) надо пользоваться методами оптимизации при наличии двух и более целей (ГОСТ 18.001—76, ГОСТ 18.101—76).

2.11. Функции $\varphi(P)$, $\Theta_n(P)$, а также входы и выходы могут быть детерминированными и случайными.

Формально базовая математическая модель при этом не изменяется. Однако наличие случайных величин и (или) функций существенно влияет на процесс получения исходных данных и вычислительную процедуру.

3. Требования к динамическим математическим моделям оптимизации

3.1. В динамической математической модели оптимизации параллельного комплекса целевая функция и (или) хотя бы одно из ограничений зависят от времени.

Динамическая модель должна содержать начальные условия:

в момент времени $t=t_0$ существует параллельный комплекс с элементами, для которых заданы векторы входа $\bar{x}_0(1), \bar{x}_0(2), \ldots, \bar{x}_0(N)$ и параметры $\bar{P}_0(1), \bar{P}_0(2), \ldots, \bar{P}_0(N)$.

Функции преобразования, определяющие функционирование n-го элемента комплекса, также могут зависеть от времени:

$$\begin{aligned} y_1(n, t) &= F_{1n}(\bar{x}(n, t), \bar{P}(n, t), t) \\ y_2(n, t) &= F_{2n}(\bar{x}(n, t), \bar{P}(n, t), t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{u_n}(n, t) &= F_{u_n n}(\bar{x}(n, t), \bar{P}(n, t), t). \end{aligned} \tag{12}$$

3.2. Динамическая математическая модель позволяет определить изменение параметров комплекса во времени, изменение объема его производства и сроки снятия с эксплуатации, при которых целевая функция достигает экстремального значения и удовлетворяются действующие ограничения. Рассмотрение таких моделей позволяет построить методы вычисления оптимальных опережающих значений числа типов стандартизуемых объектов и их параметров.

Таким образом, управление процессом осуществляется выбором значений параметров $\overline{P}(n, t)$, $n=1, 2, \ldots, N$, $t \in [t_0, T]$, при которых выполняются ограничения (12) и целевая функция достигает экстремального значения.

3.3. В зависимости от конкретных условий в динамическую математическую модель оптимизации параллельного комплекса должны быть дополнительно включены следующие специфические ограничения:

задано изменение спроса или объема работ (услуг) во времени;

задан процесс замены технологического оборудования, технологии изготовления, а также изменение способа и области применения комплекса во времени;

заданы требуемые ресурсы (трудовые, финансовые, материалы и т. д.) как функции времени;

фиксированы сроки освоения производства (поставок) комплектующих элементов, материалов.

3.4. Целевая функция должна составляться как функция от состояния комплекса в конечный момент времени T или в виде интеграла по времени в пределах от $t=t_0$ до $t=T$.

3.5. В зависимости от конкретных условий в результате оптимизации могут определяться:

оптимальное изменение параметров комплекса через определенные (заданные) интервалы времени (например, через 3—5 лет);

изменение параметров комплекса как функции времени в период от $t=t_0$ до $t=T$ при $T>5$—10 лет, включая моменты времени ввода новых изделий и снятия старых с производства;

моменты времени начала производства или снятия с производства и (или) потребления определенных изделий.

4. Использование базовой статической математической модели оптимизации параллельного комплекса.

4.1. Оптимизация многомерного параллельного комплекса [17].

Задан комплекс работ, содержащий 18 видов работ $J=\{1, 2, \ldots, 18\}$. Среднегодовой объем работы f_j каждого из 18 видов приведен в табл. 1. Для выполнения этого комплекса работ применяют машины 15 типов $I=\{1, 2, \ldots 15\}$. Для машины каждого типа известны себестоимость $C_n(V_n)$, $n \in I)$ в зависимости от объемов V_n выпускаемой серии (табл. 2) и годовые затраты на эксплуатацию $g^{э}_{nj}$ (табл. 3) ($g^{э}_{nj}$ — затраты на эксплуатацию единичного изделия n-го типа, удовлетворяющего спрос j-го вида, $j \in J$).

Кроме того, известно среднее число машин каждого типа, необходимое для выполнения единичной работы каждого вида (табл. 4).

Пустая (n, j) клетка табл. 4 означает, что машина n-го типа не может использоваться для выполнения работ j-го вида.

Математическая модель функционирования комплекса

Элементом комплекса является машина n-го типа.

j-ой составляющей вектора выхода n-го элемента комплекса является производительность машины при выполнении работ j-го вида.

z_{nj} — среднее число машин n-го типа, необходимое для выполнения единицы работы j-го вида.

В рассматриваемой задаче математическая модель функционирования комплекса вырождается в матрицу $\{z_{nj}\}$.

Таблица 1

Комплекс работ

Вид спроса (работы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Объем работы	1820	1940	370	220	5400	256	3000	156	1540	106	1470	1580	37	800	450	20	1	10

Таблица 2

Зависимость себестоимости одного изделия от серийности

Применяемый тип машин	Себестоимость одного изделия при объеме серии								
	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	7000	10000
1	3,2	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2
2	5,3	4,3	4,1	2,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3
3	6,25	5,0	4,8	4,6	4,4	4,2	4,1	4,0	3,8
4	7,8	6,4	6,0	5,7	5,5	5,3	5,2	5,0	4,8
5	10,4	8,5	7,6	7,3	7,1	6,9	6,7	6,7	6,4
6	13,0	10,7	9,6	8,9	8,7	9,6	8,7	8,4	8,1
7	16,2	13,4	12,5	11,5	11,1	10,8	10,8	10,5	10,1
8	17,8	14,6	13,7	13,1	12,6	12,2	11,9	11,5	11,1
9	21,0	17,1	16,0	15,3	14,7	14,2	13,9	13,4	12,9
10	24,0	19,8	18,5	17,7	17,0	16,4	16,1	15,5	15,0
11	27,5	22,7	21,2	20,3	19,5	18,8	18,4	17,8	17,1
12	30,8	26,4	24,7	23,7	22,7	21,9	21,4	20,7	20,0
13	38,8	29,9	27,9	26,8	25,6	24,8	24,2	23,4	22,4
14	41,8	33,6	31,5	30,2	29,0	28,0	27,4	26,4	25,5
15	50,0	40,1	38,5	36,9	35,4	34,3	33,5	32,3	31,2

Таблица 3

Годовые затраты на эксплуатацию

Применяемый тип машин	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Годовые затраты	2,7	3,5	3,6	3,8	4,1	4,4	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5	5,9	6,2	6,6	7,2

Таблица 4

Среднее число машин, необходимых для выполнения единичной работы

Применяемый тип машин	Среднее число машин, необходимых для выполнения единичной работы вида																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1,00	1,18	1,40	1,71														
2	0,84	1,00	1,17	1,43	1,78													
3	0,85	0,95	1,00	1,22	1,50	1,80												
4	0,69	0,80	0,95	1,00	1,24	1,48	1,84											
5	0,60	0,72	0,81	0,91	1,00	1,20	1,49											
6				0,83	0,94	1,00	1,25	1,34	1,51	1,63								
7				0,75	0,84	0,90	1,00	1,07	1,21	1,30	1,46							
8						0,85	0,95	1,00	1,12	1,21	1,36	1,55	1,73					
9							0,90	0,95	1,00	1,08	1,21	1,38	1,54					
10							0,86	0,91	0,95	1,00	1,12	1,28	1,43					
11									0,90	0,95	1,00	1,14	1,27	1,35				
12										0,88	0,93	1,00	1,11	1,19				
13										0,82	0,87	0,94	1,00	1,06	1,16	2,00	2,40	2,60
14											0,82	0,88	0,94	1,00	1,10	1,48	1,82	1,95
15												0,83	0,88	0,93	1,00	1,35	1,65	1,78

Математическая модель оптимизации

В рассматриваемой задаче функция применяемости $\Theta(j, n)$ (доля спроса на работы j-го вида удовлетворяемая машинами i-го вида) оптимизируется одновременно с выбором типа машин.

Количество единиц спроса вида j, удовлетворяемое n-ым типом машин f_{nj}, равно

$$f_{nj}=\Theta(j, n)f_j, \tag{13}$$

где f_j — спрос вида j.

Количество машин n-го типа V_n вычисляется, исходя из условия полного удовлетворения спроса без избытка

$$V_n = \sum_{j\in J} z_{nj} f_{nj}, \quad n\in I. \tag{14}$$

Если $V_n=0$, то n-ый тип машин не используется.

Целевая функция оптимизации рассматриваемого комплекса

$$Ц = \sum_{n\in I} G_n(V_n), \tag{15}$$

где

G_n — стоимость производства и эксплуатации машин n-го типа (в объеме V_n),

$$Ц= \sum_{n\in I} \left\{C_n(V_n)V_n + \sum_{j\in J} g^{э}_{nj} z_{nj} f_{nj}\right\}. \tag{16}$$

Таким образом, требуется определить оптимальный набор типов машин, выбранных из списка $I=$ 1, 2, . . . , 15}, при которых функция суммарных затрат (16) достигает минимума и выполняется условие (14).

При решении задачи выбора оптимального комплекса машин с минимальными суммарными приведенными затратами на производство и эксплуатацию при выполнении заданного комплекса работ J для всякого $n=1, 2, \ldots, 15$ использовалась зависимость себестоимости от объема при $V_{n_1}=1000$, $V_{n_2}=4000$, $V_{n_3}=10000$. Полученная при этом задача выбора оптимального набора решалась на ЭВМ БЭСМ-6 с помощью алгоритма типа ветвей и границ, изложенного в [15]. Результаты расчетов помещены в табл. 5.

Оптимальный параллельный комплекс (результаты расчета)

Таблица 5

Наименьшие суммарные затраты	Оптимальный параллельный комплекс	Объемы выпуска	Области использования
11400	1	1820	1
	5	7300	2, 3, 4, 5
	6	260	6
	9	3120	7, 8, 9, 10
	14	4410	11, 12 13, 14, 15

Проверка математической модели заключается в определении отклонений целевой функции от оптимального значения вследствие предполагаемых ошибок прогнозирования объема работ f_j функций затрат и матрицы заменяемости (табл. 4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5
Справочное

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ КОМПЛЕКСНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В зависимости от цели оптимизации, стадии разработки объекта, а также от наличия исходной информации, средств и времени используются строгие теоретические (ГОСТ 18.101—76) и экспериментальные (ГОСТ 18.001—76) методы оптимизации или приближенные методы обоснования.

Приближенные методы в зависимости от гносеологических основ, используемых для упрощения задачи, подразделяются на частные методы и макрометоды.

Частный метод оптимизации параметров объектов стандартизации заключается в упрощении совокупности зависимостей строгого метода обоснованным исключением из анализа некоторых факторов, затрат, целей, ограничений или ввода дополнительных ограничений.

Сущность макрометода заключается в том, что зависимости для эффектов, затрат, целей и ограничений не раскрываются, а при обосновании исходят из анализа удачных решений в прошлом по близким вопросам, принятых для условий, близких к интересующим в данной задаче и (или) из анализа передового опыта, поведения и мнения людей, например, по данным торговой статистики, принятым проектам.

С увеличением комплексности оптимизации следует шире использовать сочетание строгих и приближенных методов оптимизации параметров объектов комплексной стандартизации (п. 2.7 настоящего стандарта).

При этом необходимо учитывать ограничения на область применения приближенных методов, указанные в таблице.

Приближенные методы	Область применения
1. Частные методы на основе сравнения экономической эффективности по принятым методикам	Если доказано, что оптимальный вариант находится среди сравниваемых и специальные и технические эффекты при изменении параметров объекта изменяются монотонно с изменением экономического эффекта
на базе инженерных расчетов и экспериментов на прочность, устойчивость, износ, нагрев, производительность, точность и др. свойств	Если доказано, что экономические и социальные эффекты изменяются монотонно с изменением технических свойств объекта
на основе сопоставительного анализа по интегральному показателю качества	Если доказано, что оптимальный вариант находится среди сравниваемых и допустимо использовать принятый показатель
на основе анализа результатов изготовления при данном технологическом процессе	Если доказана целесообразность использования технологического процесса без изменения

Приближенные методы	Область применения
на основе анализа некоторых потребностей населения и народного хозяйства	Если обоснована целесообразность удовлетворения этих потребностей
II. Макрометоды на основе теории оптимальных статистических решений	Если располагают достаточными данными по принятым в прошлом удачным решениям и разработаны методы перерасчета данных прошлого опыта с учетом изменения условий и целей
на основе анализа удачно принятых решений (использования передового опыта)	
на основе сопоставительной оценки по средне-взвешенным обобщенным показателям	
на основе экстраполяции закономерностей изменения показателей качества в прошлом	

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобешко А. Оптимизация параметрических рядов изделий. Исследовательский центр по стандартизации. Варшава, 1973.
2. Комаров Д. М. Основы составления математических моделей оптимизации требований стандартов. Из-во стандартов, М., 1976.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. «Прогресс», М., 1975.
4. Ли Т. Г., Адамс Г. М., Гейнз У. М. Управление процессами с помощью ЭВМ. М., «Советское радио», 1972.
5. Лэсдон Л .С. Оптимизация больших систем. М., «Наука». 1975.
6. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М., «Наука», 1975.
7. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем, М., «Мир», 1975.
8. Пасько Н. И. Построение рядов типоразмеров с помощью математических решений, «Стандартизация», 1965, № 3.
9. Погожаев И. Б., Шпак В. А. Обобщенные показатели в задачах управления, НТО, Новосибирск ВЦСО АН СССР, 1976.
10. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М., «Наука», 1973.
11. Робертс С. Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления. М., «Мир», 1965.
12. Ситтиг Дж. Экономические возможности оптимальной стандартизации». сб. «Экономика стандартизации» М. 1970. № 10.
13. Фан-Лянь-Цэнь, Вань-Чу-Сен. Дискретный принцип максимума. М., «Мир», 1967.
14. Чуев Ю. В., Спехова Г. П. Технические задачи исследования операций. М., «Советское радио», 1971.
15. Методика оптимизации параметров простейших последовательных комплексов объектов стандартизации. ВНИИС, 1975.
16. Типовая методика оптимизации одномерного параметрического (типоразмерного) ряда. Изд-во стандартов. М., 1975.
17. Типовая методика оптимизации многомерного параметрического ряда. Изд-во стандартов. М., 1975.

Редактор *Р. С. Федорова*
Технический редактор *Г. А. Макарова*
Корректор *Е. И. Морозова*

Сдано в набор 26.12.77 Подп. в печ. 20.04.78 2,25 п. л. 2,41 уч.-изд. л. Тир. 20000 Цена 15 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, Москва, Д-557, Новопресненский пер., 3
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256. Зак. 3243